النظرية النسبية الخاصة

تأليف:

د. ناظم أحمد حســــون

د. عياد مفتاح شـــاحوت

د. بثينة عبدالمنعم إبراهيم

كلية الآداب و العلوم – جامعة المرقب

2004

drshahoot@yahoo.com
P. O. Box 40099 Khoms-Libya

المحتويات

الفصل الأول

مدخل إلى النظرية النسبية الخاصة

المقدمة 6
1.1نظرية نيوتن للجسيم.. 10
2.1 التجارب الأولى لقياس سرعة الضوء 11
3.1 طبيعة الضوء.. 15
4.1 تجربة مايكلسن ومورلي 16
5.1 محاور الإسناد.. 20
6.1 تحويلات غاليليو 21
أمثلة محلولة... 24
تمارين الفصل الأول 35

الفصل الثاني

تحويلات لورنس وتطبيقاتها

1.2تحويلات لورنس 38
2.2 تباطؤ الزمن وتقلص الطول.. 42
3.2 تحويلات السرعة–التعجيل.. 44
4.2 تغير الكتلة مع الزمن 47
5.2 العلاقة بين الطاقة والزخم 50
6.2 تحويل الزخم– الطاقة– الكتلة –القوة....................................... 52
7.2 انتشار الضوء في أوساط متحركة.. 55
8.2 الزيغ في النجوم 57
أمثلة محلولة... 61
تمارين الفصل الثاني 74

الفصل الثالث

نظرية التصادم

1.3المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة..................................... 79
2.3 نظرية التصادم المرن.. 84
3.3 نظرية التصادم غير المرن.. 95
4.3 تأثير كومبتن 99

5.3 امتصاص وانبعاث الفوتونات 105
أمثلة محلولة.. 111
تمارين الفصل الثالث 130

الفصل الرابع

الفضاء ذو الأبعاد الأربعة والمتجهات الرباعية

1.4 المتجه الرباعي.. 135
2.4 تحويلات لورنس واستخدام المصفوفات 138
3.4 تحويلات السرعة والمتجه الرباعي 142
4.4 المتجه الرباعي للزخم والقوة.. 145
5.4 تحويل الموجات الكهرومغناطيسية 150
6.5 تأثير دوبلر 154
7.4 انعكاس الضوء من سطوح متحركة.................................... 158
أمثلة محلولة.. 162
تمارين الفصل الرابع 169

الفصل الخامس

النسبية والجسيمات الأولية

1.5 خواص الجسيمات الأولية... 172
2.5 انحلال الجسيمات الأولية... 176
3.5 انتاج الباريونات والميزونات.. 187
4.5 انتاج بروتون الضد 191
5.5 انتاج الزوج بواسطة الفوتونات.. 195
أمثلة محلولة 197
تمارين الفصل الخامس.. 219

الفصل السادس

النسبية والكهربائية المتحركة

1.6 المقدمة.. 223
2.6 اللاتغير في كمية الشحنة المتحركة.................................... 224
3.6 قياس المجال الكهربائي في محاور اسناد مختلفة........................ 225
4.6 مجال شحنة نقطية تتحرك بسرعة ثابتة 228
5.6 القوة المؤثرة على شحنة متحركة 231

6.6 تحويلات المجالات الكهرومغناطيسية الناتجة من الشحنات الكهربائية المتحركة بسرعة ثابتة... 238
7.6 النسبية والتفاعلات الكهرومغناطيسية.................................. 243
أمثلة محلولة.. 250
تمارين الفصل السادس 267

الملاحق

بعض الثوابت الفيزيائية.. 271
معجم المصطلحات العلمية 272

المراجع.. 282

الفصل الأول

(مدخل إلى النظرية النسبية الخاصة)

المقدمـــــــــة.
1.1 نظرية نيوتن للجسيم .
2.1 التجارب الأولى لقياس السرعة.
3.1 طبيعة الضوء.
4.1 تجربة مايكلسن ومورلي.
5.1 محاور الإسناد.
6.1 تحويلات غاليليو.
أمثلة محلولة.
تمارين الفصل الأول.

مــقــدمــة

تفتقر المكتبة العربية للكتب المتعلقة بالنظرية النسبية، فجلّ ما في متناول الطالب هو مصادر بلغات أجنبية تكلف الطالب جهداً ووقتاً من أجل فهمها واستيعاب مضامينها إضافة إلى أننا نطمح إلى أن تكون لغة التدريس في الجامعات هي اللغة العربية لما يمثله ذلك من تجسيد للهوية القومية وذلك ما دفعنا إلى تأليف هذا الكتاب الذي نتمنى أن يكون إضافة جديدة لمنهج التعريب الذي تسلكه معظم الجامعات العربية. كما أننا لمسنا حاجة طالب الفيزياء في المرحلة الرابعة لكتاب يعتمده في دراسته لمواضيع النظرية النسبية الخاصة، وقد اعتمدنا في تأليف هذا الكتاب النظام العالمي للوحدات.

يتضمن الكتاب ستة فصول يتناول الفصل الأول مدخلاً إلى النظرية النسبية الخاصة والفصل الثاني دراسة وافية حول تحويلات لورنس وتطبيقاتها ويحتوي الفصل الثالث على نظريات التصادم المرن وغير المرن واستخدام المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة. كما يحتوي الفصل الرابع على دراسة الفضاء ذي الأبعاد الأربعة والمتجهات الرباعية. ويتناول الفصل الخامس الجسيمات الأولية وطرق انحلالها وإنتاجها. أما الفصل السادس والأخير فيركز على علاقة الكهربائية المتحركة بالنسبية.

وتجدر الإشارة إلى أننا في هذا الكتاب اعتمدنا استخدام محاور الإسناد (المحاور المرجعية) في معالجة وحل جميع المسائل الخاصة بمواضيع النظرية النسبية الخاصة.

ولقد أوردنا في نهاية كل فصل مجموعة من الأمثلة المحلولة بشكل مفصل واتبعناها بمجموعة من التمارين. وأضفنا في نهاية الكتاب ملحقاً لبعض الثوابت التي يحتاجها الطالب في موضوع النظرية النسبية الخاصة إضافة إلى معجم عربي–إنجليزي ليساعد الطالب عند دراسته المراجع العلمية باللغة الإنجليزية.

ولا يفوتنا في هذا المقام أن نتقدم بشكرنا الجزيل إلى الإدارة العامة لجامعة المرقب وإدارة كلية الآداب والعلوم لتبنيها نشر هذا الكتاب، كما نتقدم بشكرنا أيضا للأستاذ سعد عبداللطيف لمراجعته الكتاب لغوياً ولكل الذين ساهموا في إخراجه بصورته الحالية. نرجو أن نكون قد وفقنا في عملنا العلمي المتواضع والله الموفق.

المؤلفون

في 2004/02/01 ف

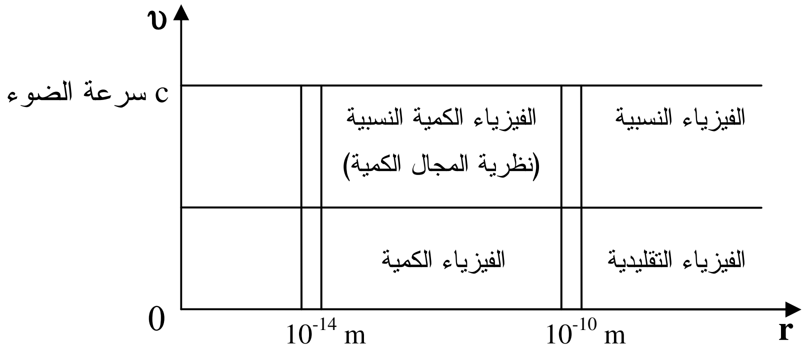
مدخل إلى النظرية
النسبية الخاصة

المقدمـــــــة

احتلت الفيزياء التقليدية مكانة مهمة في تفسير أغلب الظواهر الفيزيائية فـي القرون الماضية وحتى مطلع القرن العشـرين، وقـد اخـذ الميكانيـك التقليـدي (الكلاسيكي) الجزء الأكبر منها مثل معادلات نيوتن في الحركـة للأجسـام ذات الأبعاد المنظورة، الساكنة منها والمتحركة بسُرع اعتيادية. أما بالنسبة للموجـات الكهرومغناطيسية (تشمل نظرية الضوء) فقد فُرض وجود وسـط مـادي يسـمى الأثير لانتقال هذه الموجات، حيث كان الاعتقاد السائد سابقاً أن الضوء لا ينتقل إلا بوجود وسط مادي كما هو الحال في الموجات الصوتية. فعند إجراء الكثيـر مـن التجارب المختلفة ومنها تجربة مايكلسن ومورلي ظهرت تناقضات غريبـة فـي النتائج وقد بذلت جهود حثيثة لترميم فكرة الأثير وجعلها متوافقة مع التجربة ولكن جميع هذه الجهود باءت بالفشل، لدرجة اعتبار تجربة مايكلسن ومورلي من أغرب التجارب التي أتت بنتائج عكسية. لذلك ألغيت فكرة الأثير من قبل الكثيـرين مـن العلماء وبالأخص آينشتاين. واعتبر أن الموجات الضوئية هي اضطراب كهربائي ومغناطيسي ينتشر دون الحاجة إلى وسط مادي لانتقاله. إضافة إلى ذلـك ظهـر العديد من المشاكل في تفسير الظواهر الفيزيائية للأجسام التي تقارب سرعها مـن

سرعة الضوء. لذا اقترح العالم آينشتاين سنة 1905 مبدأين للنسبية أولهما "إن قوانين الفيزياء جميعها لا تتغير في نظام الإحداثيات الساكنة والمتحركة بسُرع ثابتة وأن صيغها الرياضية تبقى نفسها في جميع أنظمة الإحداثيات". إن هذه الفكرة ليست جديدة حقاً وقد أشار إليها العالم نيوتن سابقاً ولكن آينشتاين وسع هذه الفكرة لتشمل الظواهر الكهرومغناطيسية إضافة إلى الظواهر الميكانيكية. أما المبدأ الثاني فهو"ثبوت سرعة الضوء في جميع أنظمة الإحداثيات" وأن هذين المبدأين هما المدخل إلى النظرية النسبية الخاصة ويسميان بمبدأ النسبية لآينشتاين.

الشكل التالي يوضح موقع الفيزياء النسبية، حيث يلاحظ في الشكل أن الفيزياء التقليدية تطبق على الأجسام ذات الأبعاد المنظورة والتي تتحرك بسُرع واطئة. أما إذا قاربت سُرع هذه الأجسام سرعة الضوء، فان قوانينها تخضع إلى الفيزياء النسبية الخاصة.



شكل يوضح موقع الفيزياء النسبية

سنتناول بنود هذا الفصل بشيء من التفصيل والبساطة لتوضيح المفاهيم العلمية وإيصالها بشكلها السليم للطالب، فيما سنلقي الضوء في البنود القادمة على تطبيقات الفيزياء التقليدية والتجارب الأولية لقياس السرعة وطبيعة الضوء وتجربة مايكلسن ومورلي وكذلك نظام الإحداثيات الساكنة والمتحركة وتحويلات غاليليو. وقد وضعت مجموعة من الأمثلة في نهاية الفصل إضافة إلى مجموعة من التمارين لتكون عوناً للطالب في فهم واستيعاب المواضيع التي تم تناولها في هذا الفصل.

1-1 نظرية نيوتن للجسيم:

النظرية النسبية الخاصة من المواضيع المهمة في الفيزياء النظرية فهي تمثل أحد الفروع الرئيسية في الفيزياء المتقدمة خلال القرن العشرين. وهكذا نرى أن جذور هذه النظرية قد ثبتت بواسطة ملاحظات دقيقة وعميقة في المختبر لوصف الحالة التي تسلكها الدقائق المختلفة في الطبيعة.

إن نظرية الدقائق قد تم تأسيسها من قبل نيوتن ووجد العلماء أن هذه النظرية استطاعت أن تعطي تعليلاً مقنعاً لجميع الظواهر المشاهدة ولفترة تزيد عن مـــائتي عام بعد ظهورها إلا أنها وبعد تلك الفترة بدأ الشعور بأن هذه النظرية غير دقيقـــة وليست مقنعة. حصل ذلك بعد أن وجد الفيزيائيون أنفسهم أنهم قادرون على إكمال ملاحظاتهم على الجسيمات الصغيرة كالإلكترونات التي تتألف منها الـــذرات. إن هذه الجسيمات خفيفة بحيث يمكن تعجيلها إلى سُرع عالية جداً دون صرف طاقـــة عاليـــة.

إن قوانين الحركة المتعلقة بالنظرية النسبية الخاصة تتصدر تلـــك المتعلقـــة بنظرية نيوتن، إذا ما أخذ بالاعتبار هذه السُرع العالية التي لا يمكن الوصول إليها إذا أجريت تجارب على الأجسام الاعتيادية، وحتى الصواريخ الفضائية لا يمكـــن أن تصل سُرعها إلى هذه السُرع العالية. وهكذا فالنظرية النسبية الخاصة تشـــترك مع الفيزياء الذرية والنووية ببعد يظهر هذا الانحراف الذي ساعد علـــى دراســـة الظواهر التجريبية الرئيسية.

إن الأفكار المتعلقة بحركة جسيم سبق أن تمت معالجتها بواســـطة نظريـــة نيوتن للحركة ويمكن تطبيقها بصورة متكافئة في النظرية النسبية الخاصـــة التـــي تتابع التطور للأفكار الأساسية نفسها كما هو الحال في الميكانيك الكلاسيكي.

من المفيد الآن أن نبدأ بمراجعة سريعة تخص النقاط الرئيسية لنظرية نيوتن.

لنعتبر جسيماً كتلته السكونية m_0 يمتلك في لحظة ما سرعة مساوية إلى $\vec{\upsilon}$ وزخماً مساوياً إلى $\vec{P}$ فيكون :

$$\vec{P} = m_0\vec{\upsilon} \qquad (1\text{-}1)$$

إن زخم الجسيم كما تصفه قوانين نيوتن للحركة هو كمية محفوظة، أي أنـــه يبقى ثابتاً ما لم تؤثر على الجسيم قوة خارجية. ولمجموعة مغلقة مـــن جســـيمات يحدث تقارن بعضها مع بعض، فإن الزخم الكلي للمجموعة يبقى أيضاً محفوظـــاً. فإذا كانت $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الجسيم يكون :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (2\text{-}1)$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\vec{\upsilon}) = m_0\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m_0\vec{a} \qquad (3\text{-}1)$$

حيث أن $\vec{a}$ تعجيل الجسيم. يعبر عن الطاقة الحركية للجسيم كالآتي:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 = \frac{p^2}{2m_0} \qquad (4\text{-}1)$$

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم وكانت إزاحته باتجاه معين مساوية إلى $\vec{\ell}$ فإن الشغل المنجز عليه يساوي التغير في طاقته الحركية إذ يحصل تغير في ســـرعته من $\vec{\upsilon}_1$ إلى $\vec{\upsilon}_2$ فيكون

$$\vec{F}.\vec{\ell} = \frac{1}{2}m_0\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_0\upsilon_1^2 \qquad (5\text{-}1)$$

2-1 التجارب الأولى لقياس السرعة :

سبق أن وّضحنا أنه إذا أثرت قوة ثابتة $\vec{F}$ على جسيم فإن ســـرعة الجســـيم تأخذ بالازدياد بصورة تدريجية مع الزمن فإذا بدأ الجسيم بالحركة من السكون في اللحظة الزمنية $t = 0$ يكون :

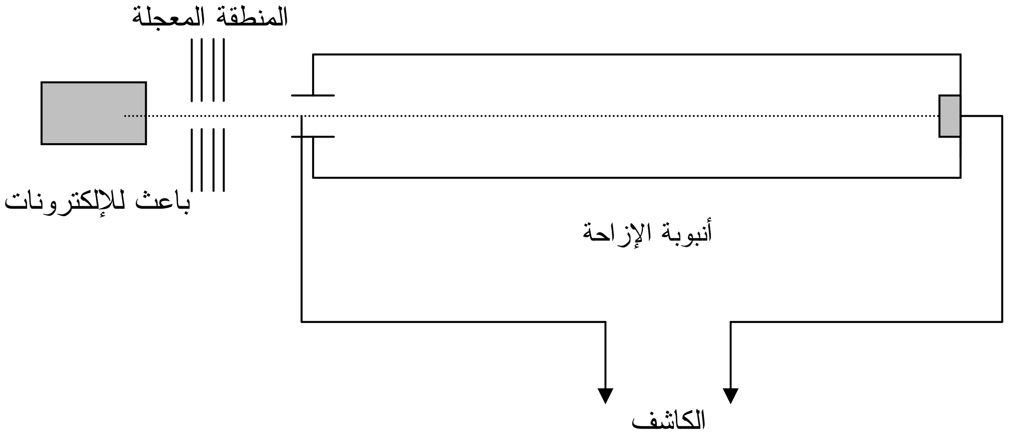
$$\vec{F} = m_0\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (6\text{-}1)$$

$$\therefore \quad \upsilon = \int \frac{F}{m_0}dt = \frac{F}{m_0}t \qquad (7\text{-}1)$$

بفرض أن الكتلة لا تتغير مع الزمن.

من الممكن إذن جعل الجسيم يكتسب أية سرعة عالية بالتـــأثير عليـــه بقـــوة تستمر لفترة طويلة من الزمن. فهل يمكن ذلك ؟

إن الجسيمات الخفيفة يمكن تعجيلها بسهولة وأن أخف جسيم يمكن الحصول عليـــه هو الإلكترون. لنعتبر الآن التجربة الآتية التي بواسطتها نستطيع تعجيل مثل هـــذه الجسيمات إلى سُرع عالية جداً. والشكل (1-1) يبين أحد المعجلات التي استخدمت لتعجيل هذه الجسيمات.



الشكل (1-1): رسم تخطيطي لجهاز قياس زمن انطلاق الإلكترونات السريعة، حيث تنطلق الالكترونات من باعث الكتروني وتعجل بواسطة فرق جهد.

تنطلق الإلكترونات التي شحنة كل منها q من المصدر، وتتعجل بواسطة فرق جهد كهربائي عالٍ V فتزاح هذه الإلكترونات بعدها باتجاه أنبوبة طويلة وبسرعة ثابتة يمكن حسابها من معرفة الفترة الزمنية لانتقالها داخل الأنبوبة.

من قوانين حفظ الطاقة نرى أن سرعة كل إلكتـــرون بعـــد انتهـــاء منطقـــة التعجيل يمكن حسابها من الفقدان بالطاقة الكامنة الكهربائية وكالآتي:

$$q\,V = \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2 \qquad (8\text{-}1)$$

حيث أن υ السرعة التي اكتسبها الإلكترون وأن m_0 كتلته. وبما أن:

$$q = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$m_0 = 9.11\times10^{-13}\ \mathrm{kg}$$

وأن فرق الجهد V المُسلط في إحدى التجارب يساوي:

$$1\mathrm{Mv} = 10^6\ \mathrm{v}$$

لذا ستكون سرعة الإلكترون المتوقعة مساوية إلى:

$$\upsilon^2 = \frac{2qV}{m_0} = \frac{2 x 1.6 x 10^{-19} C}{9 x 10^{-31}} = 3.6 x 10^{17} m^2/s^2$$

$$\therefore \upsilon = 6.0 x 10^8 m/s$$

إن الحسابات هذه مبنية على نظرية نيوتن القديمة ولا يحتمل أن تحصل هناك أخطاء محسوبة. أما النتائج العملية المقاسة في هذه التجربة فهي لا تتفق مع النظرية وكانت القراءات التجريبية كالآتي:

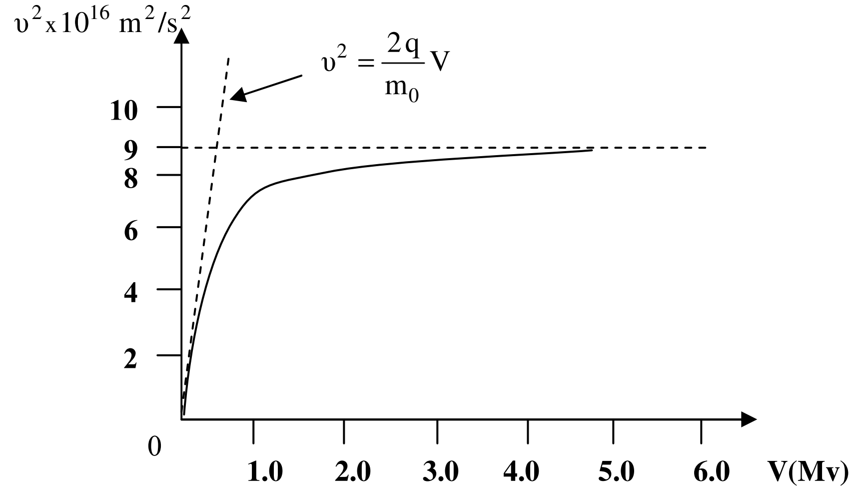
طول الأنبوبة: $\ell = 8.4$ m

فترة الانتقال : $t=3.08\times10^{-8}$ s

إذن تكون السرعة المقاسة للإلكترون مساوية إلى:

$$\upsilon = \frac{\ell}{t} = \frac{8.4 m}{3.08 x 10^{-8} s} = 2.7 x 10^8 m/s$$

يلاحظ من النتيجة الأخيرة أن السرعة المقاسة عملياً هي أصغر من تلك المتوقعة نظرياً والصورة أصبحت أكثر وضوحاً بعد إجراء سلسلة من التجارب المشابهة التي استخدمت فيها جهود معجلة مختلفة. ولقد لوحظ أنه في حالة زيادة الجهود المعجلة تنتج زيادة قليلة في السرعة.



الشكل (1-2): نتائج تجربة السرعة–υ^2 كدالة لطاقة الإلكترونات. توضيح اقتراب υ من c (سرعة الضوء في الفراغ)

يلاحظ في الشكل (1−2) أن هناك سرعة نهائية لا يمكن الوصول إلى قيم ما بعدها مهما استخدمنا من جهود معجلة عالية. إن هذه السرعة تطابق القيمة النهائية التي عندها تكون υ^2 مساوية إلى :

$$\upsilon^2 = 9.0 \times 10^{16}\ m^2/s^2$$

$$\upsilon = 3 \times 10^8\ m/s$$

وهذه السرعة هي سرعة الضوء نفسها التي كما تثبت التجربة تلعب دوراً مهماً ليس فقط فيما يخص انتشار الضوء نفسه ولكن أيضاً في حركة الجسيمات. والدراسة الحالية تتعلق بالطريقة التي لا تصح فيها نظرية نيوتن (الميكانيك القديم) للجسيمات المتحركة بسُرع عالية تصل إلى سرعة الضوء فالميكانيك القديم يطبق فقط في حالة الجسيمات المتحركة بسُرع واطئة ويكون التكهن النظري حسب العلاقة النظرية:

$$\upsilon^2 = \frac{2q}{m_0} V \qquad (9\text{-}1)$$

متفقاً مع التجارب والملاحظات العملية، والعلاقة (1−9) تمثل خطاً مستقيماً كما هو موضح في الشكل (1−2) الذي يمر بنقطة الأصل. إن النتيجة المثيرة في هذه التجربة هي أن كل إلكترون يحمل طاقة كلية بصيغة طاقة حركية مساوية تماماً إلى qV، إذن لما كانت التجربة قد أثبتت أن $qV > \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2$ يعني هذا عند السُرع υ التي تقترب قيمتها من سرعة الضوء يتبين إما أن يكون التعبير التقليدي $\varepsilon = \frac{1}{2} m_\circ \upsilon^2$ غير صحيح أو أن الإلكترونات قد تحمل أثناء حركتها طاقة بصيغة أخرى غير الصيغة الحركية المعروفة وسيتضح لنا ذلك لاحقاً.

3-1 طبيعة الضوء :-

لقد أثبتت التجارب التي قام بها علماء أمثال هايكنز، فرنيل ويونك على أن الضوء له طبيعة موجية كالظواهر التي نشاهدها والمتعلقة بالتداخل والحيود والاستقطاب، وزاد من تأكيد ذلك ما توصل إليه ماكسويل من أن الضوء عبارة عن موجات كهرومغناطيسية.

إن النظرية الموجية هذه أخفقت بدورها في تفسير عمليات الامتصاص والانبعاث التي تحصل بين الضوء والمادة كإشعاع الجسم الأسود والظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتون وكل الظواهر المتعلقة بتفاعل الإشعاع مع المادة.هذه الظواهر وغيرها لا يمكن تفسيرها ما لم تكن للضوء طبيعة جسيمية. وجاء تأكيد ذلك من التجارب التي قام بها آينشتاين وكومبتن وآخرون إذ أكدت صحة هذه النظرية.

إن الضوء يسير بسرعة غير معتمدة على التردد ν ولها قيمة في الفراغ c مساوية إلى 3×10^{8} m/s. الضوء ينتشر على شكل حزم تنقل معها طاقة وان أقل طاقة يمكن أن تحمل في الحزمة الضوئية تساوي $h\nu$ حيث أن h ثابت بلانك، وهذه الحزمة الكمية هي طاقة الفوتون المنفرد. يحمل الفوتون معه كذلك زخماً P ويرتبط بطاقته بعلاقة هي:

$$\varepsilon = h\nu = cp \qquad (10\text{-}1)$$

إن هذا الزخم الذي تولده حزمة من الضوء يمكن تحسسه إذا ما توفر لدينا أجهزة دقيقة حيث لوحظ أن الضوء يسلط ضغطاً على السطوح التي يسقط عليها يسمى عادة بضغط الإشعاع.

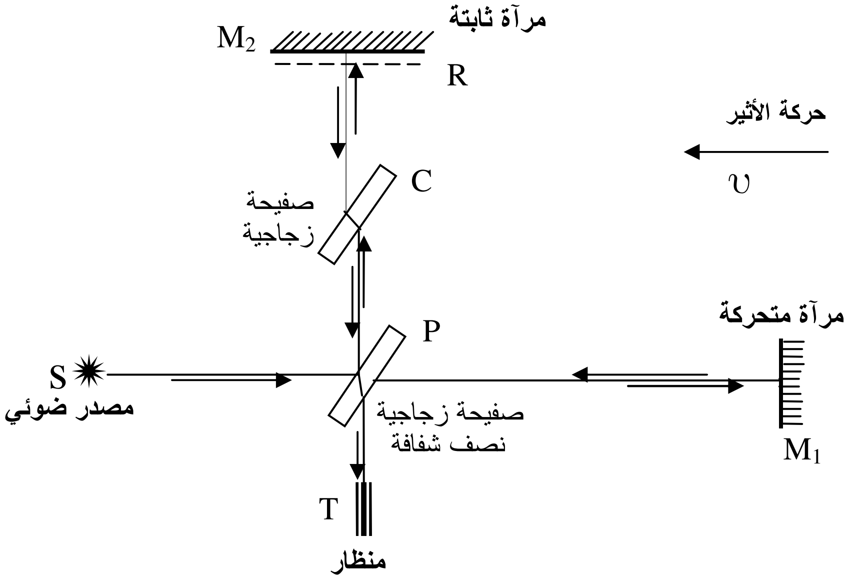
إن الاختلاف بين انتشار الفوتونات في حزمة ضوئية والجسيمات المادية كالإلكترونات لابد من دراسته بإمعان. فسرعة الفوتون هي دائماً c بغض النظر عن كمية الطاقة المنقولة من قبل الفوتون أما بالنسبة لنظرية نيوتن فتكون الطاقة الحركية المحمولة بواسطة الجسيم في حالة تزايد وتخضع لمربع سرعة الجسيم رغم أن التجارب التي أجريت على الإلكترون قد بيّنت أن سرعة الإلكترون تزداد بكميات أقل مما تزداد عليه الطاقة باقتراب هذه السرعة من c.

فعلى سبيل المثال فان سرعة الفوتون الذي طاقته الحركية 1eV هي سرعة الضوء والفوتون الذي طاقته الحركية 1MeV أيضاً له سرعة الضوء. في حين نجد أن سرعة الإلكترون الذي طاقته الحركية 1eV أقل من سرعة الإلكترون الذي طاقته الحركية 1MeV، وهذا الاختلاف ناتج عن وجود الكتلة عند الإلكترون وغيابها بالنسبة للفوتون.

4-1 تجربة مايكلسن ومورلي :

مقياس التداخل لمايكلسن جهاز بصري ذو أهمية علمية كبيرة تم اختراعه من قبل العالم الفيزيائي مايكلسن وهو يحمل اسمه.

والجهاز له القدرة على تجزئة حزمة ضوئية إلى جزأين ثم جمعهما لتكوين نموذج تداخل. يستخدم الجهاز لقياس الطول الموجي للضوء ومن أهم استعمالاته دراسة حركة الأرض خلال فراغ مطلق يسمى الأثير وهو وسط افترض سابقاً يتخلل كل شيء وكان وجوده آنذاك ضرورياً لتفسير انتشار الضوء خلال الفضاء الفارغ. حيث كان يعتقد أن موجات الضوء مثل موجات الصوت تحتاج إلى وسط مادي لانتشارها.



الشكل (1–3): رسم تخطيطي لجهاز مايكلسن ومورلي.

يوضح الشكل (1–3) أجزاء هذا الجهاز، حيث يسقط الضوء من المصدر s على صفيحة زجاجية نصف شفافة فيتجزأ إلى حزمتين ضوئيتين إحداهما تصل إلى M_1 ثم تنعكس والحزمة الأخرى بعد انعكاسها من P تصل إلى M_2 بعد أن تمر من الصفيحة الزجاجية c ثم تنعكس.

إن وجود هذه الصفيحة ضروري لجعل الضوء في هذه الذراع العمودية يقطع سمكاً زجاجياً مساوياً لذلك الذي يقطعه الضوء في الذراع الأفقية. هاتان الحزمتان الضوئيتان المنعكستان من المرآتين يحصل بينهما تداخل عند النقطة P نتيجة للاختلاف في المسارات الضوئية.

إذا كان بُعد M_1 عن P يساوي تماماً بُعد M_2 عن النقطة نفسها وأن المرآتين متعامدتان تماماً على بعضهما فإن صورة M_1 وهي R تنطبق على M_2. ولكن إذا أصبح بعد M_1 هو ℓ_1 لا يساوي بعد M_2 وهو ℓ_2 عن P أوأن M_1 ليست عمودية تماماً على M_2 تشاهد أهداب التداخل ضمن مجال الرؤية داخل منظار T. وعند تحريك المرآة M_1 مسافة تساوي $\frac{\lambda}{2}$ فإن فرق المسار الضوئي يتغير بمقدار λ (ذهاباً وإياباً) ويحصل أن هدباً مضيئاً ضمن نموذج التداخل يحل محل الهدب الآخر المجاور له. وبتحريك المرآة M_1 باستمرار تستمر حركة نموذج التداخل.

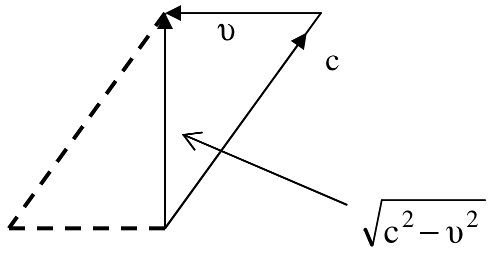
فإذا استطعنا عد هذه الأهداب التي تمر من نقطة معينة في مجال الرؤية تمكنا من حساب المسافة الصغيرة التي تحركتها المرآة M_1 حيث أن :

$$2(\ell_2-\ell_1) = m\lambda \qquad (11\text{-}1)$$

حيث أن m عدد الاهداب

إذا فرضنا أن الجهاز يتحرك بأجمعه من P إلى M_1 بسرعة ثابتة تساوي υ فإن الأثير يتحرك بالاتجاه المعاكس بالسرعة نفسها بالنسبة للجهاز كما موضح في الشكل (1–3). إذن سرعة الضوء باتجاه المرآة M_1 تكون مساوية إلى $c-\upsilon$ وسرعته بعد رجوعه باتجاه P تكون مساوية إلى $c+\upsilon$. ولكي يصل الضوء إلى المرآة M_2 من النقطة P ينبغي للشعاع الضوئي أن ينحرف بزاوية معينة. والحالة هذه مشابهة إلى سباح يريد العبور إلى النقطة المقابلة له في الجهة الأخرى من

النهر فعليه أن يسبح باتجاه معين أي بزاوية، ليتغلب على سرعة التيار للوصول إلى تلك النقطة. وعلى هذا الأساس تكون المحصلة لسرعة الضوء مساوية إلى $\sqrt{c^2-\upsilon^2}$ ، لاحظ الشكل (4–1).



الشكل (4–1): رسم تخطيطي لتوضيح إن الضوء ليصل إلى النقطة المقابلة لابد للشعاع الضوئي أن ينحرف بزاوية معينة.

الآن نفرض أن t_1 الزمن الذي يستغرقه الضوء ليقطع المسافة PM_1 ذهاباً وإياباً

$$\therefore t_1 = \frac{\ell_1}{c-\upsilon} + \frac{\ell_1}{c+\upsilon} = \frac{2\ell_1/c}{1-\upsilon^2/c^2} \approx \frac{2\ell_1}{c}(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}) \qquad (11\text{-}1)$$

نفرض أيضاً أن t_2 الزمن اللازم للضوء ليقطع المسافة PM_2 ذهاباً وإياباً.

$$\therefore t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{(c^2-\upsilon^2)}} = \frac{2\ell_2/c}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}} \approx \frac{2\ell_2}{c}\left(1+\frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) \qquad (12\text{-}1)$$

وعليه يكون الفرق في الزمن Δt بين الحزمتين الضوئيتين مساوياً إلى:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}(\ell_1-\ell_2) + \frac{2\ell_1\upsilon^2}{c^3} - \frac{\ell_2\upsilon^2}{c^3} \qquad (13\text{-}1)$$

إذا أدير الجهاز الآن بكامله بزاوية مقدارها 90° بحيث تكون الذراع PM_2 باتجاه الحركة ينتج فرق جديد في الزمن هو $\Delta t'$ حيث أن:

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{2}{c}(\ell_1 - \ell_2) + \frac{\ell_1 \upsilon^2}{c^3} - \frac{2\ell_2 \upsilon^2}{c^3} \quad (14\text{-}1)$$

إن التغير الذي يحصل في الفرق الزمني بين الحالتين أي $\Delta t - \Delta t'$ ينتج عنـــه إزاحة في نموذج التداخل بمقدار يساوي δ من الأهداب حيث أن:

$$\delta = \frac{c(\Delta t - \Delta t')}{\lambda} \quad (15\text{-}1)$$

$$\delta = \frac{(\ell_1 + \ell_2)\upsilon^2}{\lambda c^2} \quad (16\text{-}1)$$

وإذا كان $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ فمن الممكن التعبير عن هذه النتيجة بالصيغة الآتية:

$$\delta = \frac{2(\upsilon/c)^2}{\lambda/\ell} \quad (17\text{-}1)$$

إن قيمة كل من λ و ℓ و c معروفة ولكن ما قيمة υ ؟ من الواضح لمايكلســـن أن تكون هذه السرعة مساوية إلى سرعة الأرض في محورها 3×10^4 m/s. ندون الآن النتائج العملية الآتية:

سرعة الأرض $\upsilon = 3\times10^4$ m/s

سرعة الضوء $c = 3\times10^8$ m/s

الطول الموجي للضوء المستخدم $\lambda = 6\times10^{-7}$ m

طول ذراع الجهاز $\ell = 1.2$m

من هذه النتائج نحصل على:

$$\frac{\upsilon}{c} = 10^{-4}$$

$$\frac{\lambda}{\ell} = 5\times10^{-7}$$

وبتطبيق العلاقة 1−17 نجد أن :

$$\delta = 0.04$$

وتمثل هذه النتيجة مقدار الإزاحة التي تحصل في نموذج التداخل. وبالرغم من أن التأثير هذا صغير جداً إلا أنه قابل للقياس باستخدام جهاز مايكلسن ذي الحساســية العالية لقياس إزاحات أقل بكثير من القيمة أعلاه.

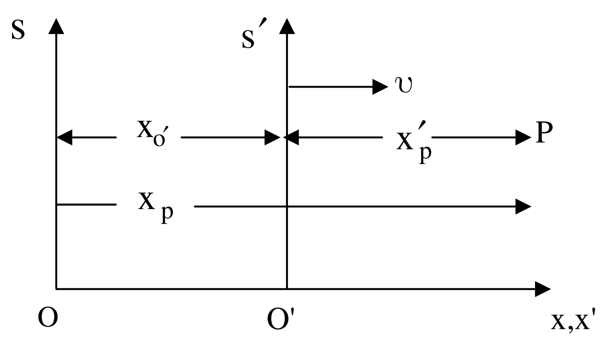
مايكلسن أدار الجهاز خلال 360° ولم يشاهد أية إزاحة محسوسة ثم أعيــدت التجربة مرات عديدة من قبل مايكلسن ومساعده مورلي وكانت خلاصة أعمالهمــا

الحصول على نتائج سلبية وتم الاستنتاج أن فكرة وجود وسط يُسمى الأثير غير صحيحة وينبغي تركها. إن هذه النتيجة السلبية اعتبرت من أهم الدعائم التي ارتكزت عليها النظرية النسبية الخاصة.

5-1 محاور الإسناد:

عندما يبدأ مشاهدان بقياس سرعة جسيم في حالة حركة فإنهما سيحصلان على نتائج مختلفة إذا كان أحدهما يتحرك بسرعة معينة نسبة للآخر. إن السرعة المقاسة من قبل أي منهما تسمى بالسرعة النسبية.

لنعتبر الآن قطاراً يتحرك بسرعة υ باتجاه الاحداثي x وأن هناك راكبين داخله أحدهما جالس والآخر يتحرك باتجاه حركة القطار بسرعة ثابتة تساوي u. وإذا فرضنا أن شخصاً يقف بجانب القطار فإنه يشاهد ذلك الراكب الآخر يتحرك بسرعة تساوي $u+\upsilon$ باتجاه الاحداثي x. والنتيجة هذه ستكون مختلفة إذا كان ذلك الراكب الآخر يتحرك بالاتجاه المعاكس لحركة القطار. إذن إذا أردنا أن نتكلم عن السرعة النسبية علينا أولاً تثبيت المشاهد الذي نعنيه لنتمكن من إعطاء النتيجة عن تلك السرعة لمشاهد آخر تم تحديد موقعه. وأي مشاهد إذا كان مجهزاً بأدوات قياس للإزاحة والسرعة والزمن فإنه يرتبط بما نسميه بمحور الإسناد. وهكذا نعرف محور الإسناد بأنه نظام إحداثيات مثبتة في مكان ما تُجرى فيه قياسات مختلفة عن حركة جسيم ضمن ذلك النظام.



الشكل (5-1): محورا الإسناد s,s` بينهما سرعة نسبية تساوى υ.

لنرمز الآن لمحور إسناد الشخص الذي يقف بجانب القطار بالرمز s ولمحور إسناد القطار المتحرك بسرعة υ بالرمز s' كما موضح في الشكل (1–5). ولنفرض أن النقطة P تمثل موقع الراكب في حالة حركة في محور الإسناد s'. ويلاحظ أن x_p هي موقع تلك النقطة بالنسبة لمحور الإسناد s مقاسة من نقطة الأصل O وأن x'_p موقعها بالنسبة لمحور الإسناد s' مقاسة من نقطة الأصل O'. وإذا كان بعد نقطة الأصل O' عن نقطة الأصل O يساوي $x_{o'}$ في لحظة ما فإن:

$$x'_p = x_p - x_{o'} \tag{18-1}$$

وبإجراء عملية التفاضل لطرفي المعادلة بالنسبة للزمن $t = t'$ نجد أن:

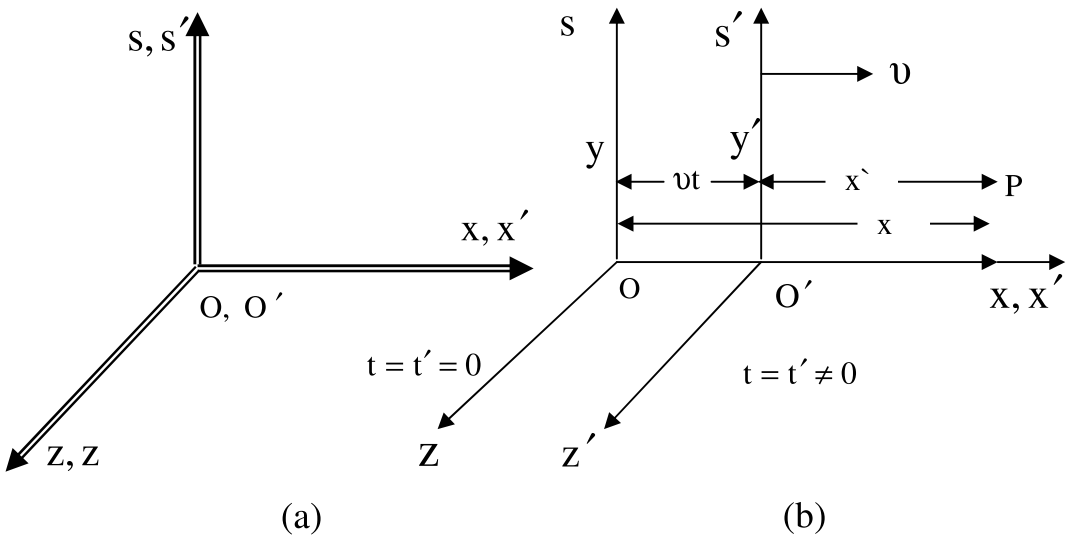
$$u'_x = u_x - \upsilon \tag{19-1}$$

إذ أن u_x تمثل سرعة الراكب في المحور s و u'_x تمثل سرعة الراكب في المحور s'. وتجدر الإشارة إلى أن الراكب الجالس في القطار من الممكن اعتباره مشاهداً في محور الإسناد s' إذ أن سرعته تساوي صفراً نسبة للقطار وهذا المشاهد هو الذي يحدد سرعة الراكب داخل القطار، والشخص الواقف خارج القطار من الممكن اعتباره مشاهداً في محور الإسناد s إذ أن سرعته تساوي صفراً نسبة إلى الأرض وهو الذي يحدد سرعة القطار في هذا المحور نسبة إلى الأرض.

6-1 **تحويلات غاليليو:**

لقد وجد غاليليو خلال دراسته للأجسام الساقطة أن الحجر الذي يسقط بصورة حرة من قمة صارية يضرب ظهر السفينة عند قاعدتها ووجد أيضاً أن هذه النتيجة هي نفسها سواء كانت السفينة ساكنة أو تتحرك بسرعة ثابتة فأستنتج

أن الأرض لا يمكن إعتبارها ساكنة في ذلك الوقت بالرغم من أن جميع الأجسام الساقطة بصورة حرة تسقط عمودياً إلى الأسفل في خط مستقيم. إذن سقوط الحجر عند قاعدة الصارية لا يمكن أن يصف بالضبط الحالة الحركية للسفينة.



الشكل (1-6): محورا الإسناد s`,s (a) منطبقان علي بعضهما في زمن t = t`= 0
(b) منفصلان عن بعضهما باتجاه الاحداثي x بعد زمن t = t` ≠0.

لندرس الآن حالة سقوط الحجر في محوري إسناد مختلفين حيث هناك سرعة نسبية بينهما ولنفرض أن سقوط الحجر لوحظ من قبل مشاهد في السفينة وكذلك من قبل مشاهد على الأرض. في الحالة الأولى نرى أن الحجر يسقط بصورة عمودية وفي الحالة الثانية نرى أنه يسقط متخذاً مساراً على شكل قطع مكافيء. من وجهة النظر الديناميكية لنيوتن نكتشف أنه بالرغم من أن سقوط الحجر يختلف في الحالتين لكن النتائج تبقى متكافئة فيما يتعلق بمقدار التعجيل والقوة المسببة للتعجيل أي أن قوانين الميكانيك لنيوتن تبقى كما هي لا تتغير في جميع محاور الإسناد.

إن القياسات المتعلقة بحركة جسيم كما هي ملاحظة في محاور إسناد مختلفة يمكن التعبير عنها بمعادلات خاصة تسمى تحويلات غاليليو. إن هذه المعادلات تربط قياسات تتعلق بالموضع والزمن والسرعة والتعجيل لجسيم في محاور إسناد

يرمز لها بالرمز s مع قياسات مطابقة لها في محاور إسناد أخــرى يرمــز لهــا بالرمز `s تتحرك بسرعة ثابتة υ بإتجاه الاحداثي x نسبة لمحور الإسناد s وكما هوملاحظ في الشكل (1−6) من الممكن الآن كتابة معادلات التحويل كالآتي:

$$\left.\begin{array}{ll} x' = x - \upsilon t , & x = x' + \upsilon t \\ y' = y & \\ z' = z & \\ t' = t & \\ u'_x = u_x - \upsilon , & u_x = u'_x + \upsilon \\ a'_x = a_x & \end{array}\right\} \qquad (20\text{-}1)$$

يلاحظ في التحويلات أعلاه أن معادلات التحويل الخاصة بالسرعة يمكن الحصول عليها بعد إجراء عملية التفاضل بالنسبة للزمن الــذي يبقــى دون تغييــر أي ان $t = t'$ فيكون:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt'} - \upsilon \frac{dt}{dt'} \qquad (21\text{-}1)$$

وبما أن $dt = dt'$ فإن:

$$u'_x = u_x - \upsilon \qquad (22\text{-}1)$$

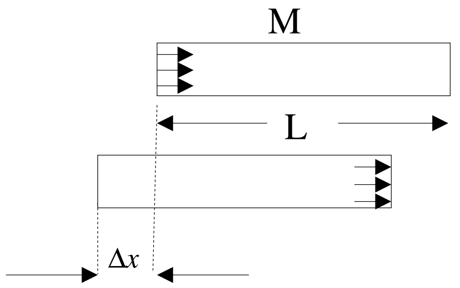
ونلاحظ أيضاً أن التعجيل يبقى دون تغير في مثل هذه المحاور، وعليه فإن علاقة قياسات السرعة والتعجيل يتم تعريفها بصورة تامة في محاور إسناد مختلفة إذا أعطيت المعادلات الثلاث الأولى إضافة إلى الزمن.

أمثلة محلولة

المثال (1):

صندوق معزول في حالة سكون طوله L وكتلته M انبعث من أحد طرفيه إشعاع (سيل من الفوتونات) نحوالطرف الآخر من الصندوق وكانت كتلة الإشعاع تساوي m وطاقته ε [لاحظ الشكل (1-7)]، مستعيناً بقوانين حفظ الطاقة والزخم إستنتج أن $\mathcal{E} = mc^2$.

الحل:



الشكل (1-7): صندوق اينشتاين – تجربة افتراضية يتم فيها توضيح ارتداد الصندوق من موقعه الأصلي إلى موقعه النهائي نتيجة تأثير ضغط الإشعاع.

ترتبط طاقة الإشعاع ε بزخمه حسب العلاقة $p = \varepsilon / c$ إذ أن c سرعةالضوء. وبما أن الزخم الكلي للصندوق بما فيه قبل بدء الإشعاع يساوي صفراً فإن زخمه يكون مساوياً إلى $-\varepsilon/c$ بعد إنتهاء الإشعاع مباشرةً، وإذا كانت υ سرعة إرتداد الصندوق فإن: $\upsilon = -\varepsilon / Mc$. وبعد أن قطع الإشعاع مسافة L فإن الزمن المستغرق Δt يساوي: $\Delta t = L/c$.

لذلك فان الإشعاع سيضرب الطرف البعيد معطياً دفعاً للصندوق بإتجاه الإشعاع وهذا الدفع يساوي بالمقدار ويعاكس بالإتجاه ذلك الدفع الذي أُعطي أولاً للصندوق.

أما الدفع الثاني فسيجعل الصندوق يصل إلى حالة السكون ونتيجة لهذه العملية يتحرك الصندوق مسافة تساوي Δx حيث أن:

$$\Delta x = \upsilon \Delta t = -\frac{\mathcal{E} L}{Mc^2}$$

وبما أن النظام بأجمعه كان معزولاً فإن مركز كتلة الصندوق مع محتوياته يزاح عن موقعه الأصلي، أي أن الإشعاع قد نقل معه كتلة تساوي m.
وبتطبيق قانون حفظ الزخم نحصل على:

$$m\frac{L}{\Delta t}+M\frac{\Delta x}{\Delta t}=0$$

$$mL+M\Delta x=0$$

$$\therefore -M\Delta x=mL$$

وبالإستعانة بالعلاقة أعلاه نجد أن:

$$\frac{\mathcal{E}L}{c^2}=mL$$

$$\therefore \mathcal{E}=mc^2$$

المثال (2)

جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير قوة خارجية. فإذا كانت سرعته في لحظة ما مساوية إلى υ. إستنتج من قوانين الميكانيك التقليدية أن طاقته الكلية $\mathcal{E}$ تعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{E}=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

حيث أن $\mathcal{E}_0$ كمية ثابتة من خصائص الجسيم.

الحل:

سبق أن أوضحنا في المثال (1) بأن هناك علاقة بين كتلة الجسيم وطاقته الكلية، $\mathcal{E}=mc^2$ ، وفي ميكانيك نيوتن يعبر عن زخم الجسيم بالعلاقة:

$$p=m\upsilon$$

$$m=\frac{p}{\upsilon}$$

إذن طاقة الجسيم $\mathcal{E}$ بدلالة زخمه، تساوي الآتي:

$$\mathcal{E}=\frac{p}{\upsilon}c^2 \qquad (1)$$

من قوانين الميكانيك التقليدي، إذا أثرت قوة خارجية F على جسيم فإن التغير في طاقته الكلية يساوي الشغل المبذول بواسطة هذه القوة:

$$d\mathcal{E} = F dx$$

$$\therefore d\mathcal{E} = \frac{dP}{dt} dx = \upsilon dP \qquad (2)$$

وبضرب المعادلتين (1) و(2) مع بعضهما البعض نحصل على:

$$\varepsilon \, d\varepsilon = c^2 \, pdp$$

وبإجراء عملية التكامل لطرفي المعادلة الأخيرة ينتج:

$$\varepsilon^2 = c^2 P^2 + \varepsilon_0^2 \qquad (3)$$

حيث أن ε_0 كمية ثابتة من خصائص الجسيم.

وبالتعويض عن $P = m\upsilon$ في المعادلة (3) نحصل على:

$$\varepsilon^2 = c^2 (m\upsilon)^2 + \varepsilon_0^2$$

$$= \left(mc^2\right)^2 \left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + \varepsilon_0^2$$

$$= \left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \varepsilon^2 + \varepsilon_0^2$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)}}$$

المثال (3):

إحسب المسافة التي يجب أن تتحركها المرآة في مقياس التــداخل لمايكلســن ليشاهد تحرك 2000 هدب مضيء عبر مجال الرؤية لضوء طــول موجتــه 606 nm.

الحل:

نستخدم العلاقة : $2(\ell_2 - \ell_1) = m\lambda$

$$2\Delta\ell = m\lambda$$

$$2\Delta \ell = 2000 \text{ x } 606 \text{ x } 10^{-9} \text{ m}$$

$$\Delta \ell = 606 \text{ x } 10^{-6} \text{ m}$$

$$\therefore \Delta \ell \cong 0.61 \text{mm}$$

المثال (4)

إلكترون كتلته 9.11×10^{-31}kg تم تعجيله خلال فرق جهد مقداره 100V فإكتسب سرعة نهائية $\upsilon=5.93\times10^{6}$m/s إحسب طول موجته المرافقة.

الحل:

نستخدم أولاً زخم الجسيم P فيكون:

$$P = m\upsilon = 9.11\times10^{-31}\times5.93\times10^{6} = 5.40\times10^{-24}\ \text{kg.ms}^{-1}$$

ومن علاقة ديبرولي يمكن ايجاد طول الموجة المرافقة:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626\times10^{-34}}{5.40\times10^{-24}} = 1.23\times10^{-10}\ \text{m}$$

$$= 0.123\ \text{nm}$$

المثال (5)

جسيم يتحرك في محور الاسناد s في المستوى x-y بسرعة تساوي 400m/s باتجاه يصنع زاوية مقدارها 60° مع الاحداثي x. جد سرعته في محور الاسناد `s علماً بأن السرعة النسبية بين محوري الاسناد $80\ ms^{-1}$.

الحل:

بتطبيق تحويلات غاليليو يكون:

$$u'_x = u_x - \upsilon = u\cos 60 - \upsilon = 200 - 80 = 120\ \text{ms}^{-1}$$

$$u'_y = u_y = u\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ x } 400 = 200\sqrt{3}\ \text{ms}^{-1}$$

$$u'_z = u_z = 0$$

$$\therefore u' = \sqrt{\left(u_x'^2 + u_y'^2\right)} = \sqrt{(120)^2 + \left(200\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= 366.6 ms^{-1}$$
$$\therefore \tan\theta' = \frac{u_y'}{u_x'} = \frac{200\sqrt{3}}{120}$$
$$\therefore \theta' \cong 71^o$$

المثال (6):

برهن أن طول موجة ديبرولي بوحدة الانجستروم (A^o) لالكترون تم تعجيلـــه من السكون خلال فرق جهد يساوي V هو:

$$\lambda = {12.27}/{\sqrt{V}}$$

الحل:

من علاقة ديبرولي:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e eV}} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e}} . \frac{1}{\sqrt{V}} =$$
$$\lambda = \frac{\left(6.626\times10^{-34}\,J.s\right)}{\sqrt{2\left(9.11\times10^{-31}\,kg\right)\left(1.6\times10^{-19}\,C\right)}} . \frac{1}{\sqrt{V}}$$
$$\lambda = \frac{6.626\times10^{-34}}{5.4\times10^{-25}} . \frac{1}{\sqrt{V}} = 1.227\times10^{-9} . \frac{1}{\sqrt{V}}\,m = \frac{12.27}{\sqrt{V}}\,A^o$$

المثال (7)

في احدى تجارب معجلات الالكترون كان الجهـــد المعجـــل مســـاوياً الـــى 0.255MV. ما سرعة الالكترونات باستخدام الميكانيك التقليدي؟ قارن هـــذه النتيجة مع تلك المتوقعة من قبل النظرية النسبية.

الحل:

لقد اثبتنا أن الطاقة الكلية للجسيم الذي سرعته تقرب من سرعة الضوء تساوي ε اذ أن:

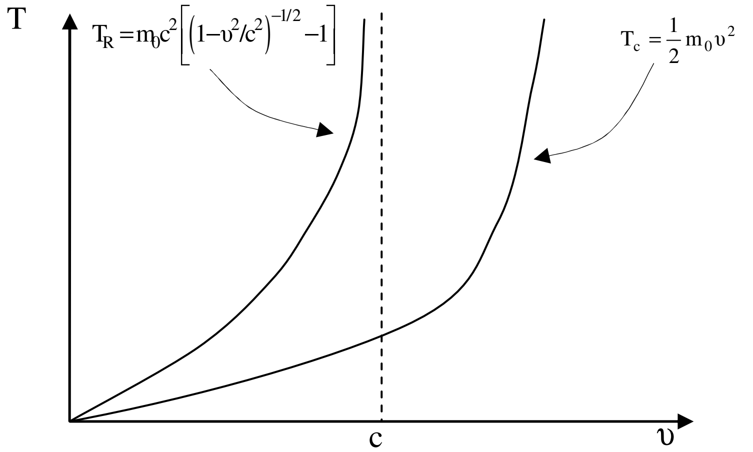
$$\varepsilon = mc^2$$

حيث أن m كتلة الجسيم في حالة حركة، وهي تساوي: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$

وبما أن الجسيم في حالة حركة، فان طاقته الكلية تتكون من مجموع طاقتي السكون والحركة، لذلك فان طاقة الحركة تساوي:

$$T = \varepsilon - m_0c^2$$
$$= mc^2 - m_0c^2$$
$$\therefore T = m_0c^2\left[\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{-1/2} - 1\right]$$

إذن الطاقة الحركية في النظرية النسبية الخاصة تعطى بموجب العلاقة أعلاه والرسم البياني الموضح بالشكل (1-8) يبين الفرق بين الطاقتين الحركية التقليدية T_C والطاقة الحركية النسبية T_R:



الشكل (1-8): منحنى الطاقة الحركية مع السرعة في الحالتين التقليدية و النسبية

اذن هناك اختلاف شاسع بين القيمتين لـ T عندما تقترب سرعة الجسيم من سرعة الضوء. ولمناقشة هذه النتائج نحتاج الى أن نعبر عن υ^2 بدلالة T فيكون:

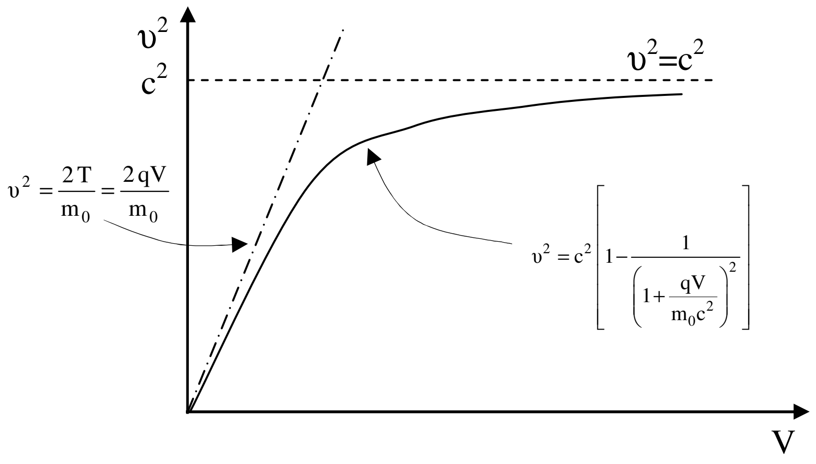
$$T + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}}$$

$$\therefore \upsilon^2 = c^2\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)^2}\right]$$

وبما أن الطاقة الحركية T تساوي التغير في الطاقة الكامنة الكهربائية $T = qV$ ، فان:

$$\upsilon^2 = c^2\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{qV}{m_0c^2}\right)^2}\right]$$

وبرسم منحني العلاقة بين مربع السرعة υ^2 والجهد V، من الممكن مقارنة التعبير النسبي مع المنحني (1-8) كما هوموضح سابقاً عند مناقشة تجربة السرعة. أما المنحني النظري فيلاحظ من الشكل (1-9):



الشكل (1-9): منحني مربع السرعة للجسيم و الجهد المسلط عليه. يظهر المنحني خاصية اقتراب υ من c مهما كان الجهد كبيراً.

اذن بالنسبة للميكانيك التقليدي يكون:

$$\upsilon^2 = \frac{2qV}{m_0} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.255 \times 10^6}{9.11 \times 10^{-31}}$$

$$\cong 9 \times 10^{16}\ \text{ms}^{-1}$$

$$\therefore\ \ \upsilon = 3 \times 10^8\ \text{ms}^{-1} = c$$

أما باستخدام قوانين النظرية النسبية الخاصة فان:

$$\therefore \upsilon^2 = c^2 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qV}{m_0 c^2}\right)^2} \right]$$

$$\therefore \frac{qV}{m_0 c^2} = \frac{0.255\,\text{MeV}}{0.51\,\text{MeV}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \upsilon^2 = c^2 \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} \right] = c^2 \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)} \right] = \frac{5c^2}{9}$$

$$\therefore \upsilon = \frac{\sqrt{5}\,c}{3}$$

المثال (8):

أحسب الطول الموجي للبروتون والالكترون، اذا كانت الطاقة الحركية لكل منهما 10MeV.

الحل:

- <u>أولاً:</u> يجب ان نتحقق هل ان الطاقة الحركية للبروتون T_p=10MeV نسبية أم غير نسبية وذلك بمقارنة طاقته الحركية مع طاقته السكونية ε_0: بما أن ε_0 للبروتون تساوي 938.3 MeV اذن $T_p << \varepsilon_0$ اذن طاقة البروتون لا تعتبر نسبية مقارنة بطاقته السكونية لذلك يمكن أستخدام العلاقة غير النسبية:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 T_p}}$$

- ثانياً: يجب مراعاة وحدات القياس، فيجب ان نحول الطاقة من وحـــدات الـــMeV الى J :

$$10\,MeV = (10\times10^{6}\ eV)(1.6\times10^{-19}\ J/eV) = 1.6\times10^{-12}\ J$$

$$\therefore \lambda = \frac{(6.626\times10^{-34}\ j.s)}{\sqrt{2\times(1.673\times10^{-27}\ kg)(1.6\times10^{-12}\ J)}} = 9\times10^{-15}\ m$$

نطبق نفس الخطوات بالنسبة للألكترون، مع مراعاة ان طاقـــة الالكتـــرون السكونية ε_0 تساوي 0.511 MeV أي ان $Te>>\varepsilon_0$ ، لذلك يجب اســتخدام العلاقة النسبية:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{T_e/c} = \frac{hc}{Te}$$

$$\therefore \lambda = \frac{(6.626\times10^{-34})(3\times10^{8})}{1.6\times10^{-12}}$$

$$\lambda = 12.4\times10^{-15}\ m$$

المثال (9)

جسيم كتلته الساكنة m_0 أثرت عليه قوة ثابتة مقدارها F فتحرك من الســكون باتجاه الاحداثي x في الزمن t=0. أوجد المسافة x التي قطعها الجسيم خلال فترة زمنية تساوي t.

الحل:

معدل التغير الزمني في الزخم الخطي للجسيم يساوي القوة المــؤثرة عليــه حسب قانون نيوتن الثاني:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$\therefore p = Ft + A$$

اذ أن A كمية ثابتة. من الشروط الحدية للمسألة ان p=0 فـــي اللحظـــة t=0 اذن: A=0. لذلك فان:

$$Ft = P = \frac{m_0 u}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} \qquad (1)$$

حيث أن u سرعة الجسيم بعد زمن يساوي t.

من العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$u = \frac{\left(F/m_0\right)t}{\sqrt{1+\left(Ft/m_0 c\right)^2}} \qquad (2)$$

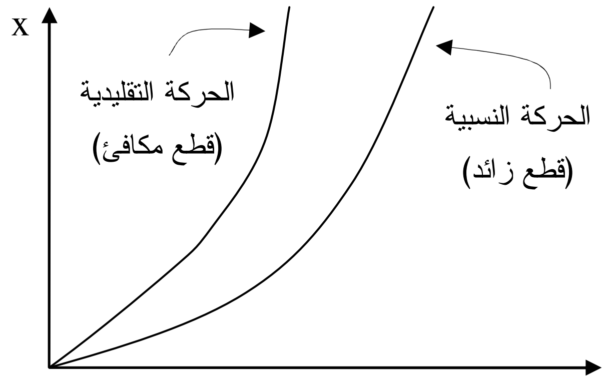
يلاحظ من هذه العلاقة أن البسط يمثل الجـــواب التقليـــدي اذا اعتبرنـــا أن $c \gg (F/m_0)t$. من جهة اخرى ان المقام النسبي يجعل u لا يمكن ان تتعـــدى سرعة الضوء، أي عندما $t \to \infty$ فان $u \to c$.

ولايجاد x نجري عملية التكامل للعلاقة (2) فيكون:

$$x = \frac{F}{m_0}\int_0^t \frac{t\,dt}{\sqrt{1+(Ft/m_0 c)^2}}$$

$$\therefore x = \frac{m_0 c^2}{F}\left[\sqrt{1+(Ft/m_0 c)^2} - 1\right] \qquad (3)$$

نستنتج مما تقدم أنه عوضاً عن القطع المكافئ التقليدي $x = \frac{1}{2}(F/m_0)t^2$ لـــدينا الآن قطع زائد كما موضح في الشكل (1-10).



الشكل (1-10): منحني الحركة التقليدية و الحركة النسبية لجسيم تحت تأثير قوة ثابتة.

وهكذا فان أية حركة تحت تأثير قوة ثابتة تسمى حركة القطع الزائد. وتحدث هذه الحركة عادة على سبيل المثال، عندما يوضع جسيم مشحون في مجـــال كهربائي منتظم.

تمارين الفصل الاول

1. انطلق فوتون بطاقة تساوي $2.135x10^{-13}J$ عند انحلال مادة مشعة. ماهوتردد وطول موجة هذا الاشعاع الكهرومغناطيسي؟

ج:($3.222x10^{20}$ Hz)
($9.31x10^{-13}$ m)

2. جسيم كتلته m وسرعته υ وزخمه mυ. اولاً: احسب بدلالة هذه المقادير طول موجة ديبرولي للجسيم. ثانياً: ما طاقة الفوتون الذي يمتلك طولاً موجياً مساوياً الى الطول الموجي للجسيم؟ ثالثاً: اذا تحرك بروتون بسرعة $5x10^4ms^{-1}$ ما طاقة الفوتون الذي له طول موجي مساوٍ الى الطول الموجي للبروتون؟ عبر عن اجابتك بوحدة قياس الالكترون فولت.

3. مشاهدان أراد كل منهما في تجربة ما أن يستعمل جهاز التداخل لمايكلسن فوجد أحدهما أن عليه أن يحرك المرآة بعيداً عنه ليعد 986 هدباً ضمن مجال الرؤية عندما استخدم جهاز ليزر بطول موجي 633nm وجاء الآخر فوجد أن عليه الآن أن يحرك المرآة نحوه ليعد 986 هدباً ضمن مجال الرؤية ولكن في هذه الحالة استخدم ضوء الصوديوم الذي طول موجته 589nm. أحسب أولاً: المسافة التي تحركتها المرآة في الحالتين. ثانياً: محصلة الأزاحة للمرآة خلال فترة تحريكها.

4. جسيم في محور الاسناد s يتحرك يسرعة $60\ ms^{-1}$ في المستوى x-y ويصنع زاوية 37° مع الاحداثي x. ما سرعة محور الاسناد `s نسبة لمحور الأسناد s كي يشاهد الجسيم في `s يتحرك رأسياً الى الأعلى وما سرعة الجسيم في هذا المحور؟

5. حزمة من الألكترونات السريعة سقطت على شق منفرد عرضه 0.5nm فتكون نموذج حيود على حاجز يبعد 20cm من الشق. فاذا كانت المسافة

بين أي هدبين مظلمين متجاورين تساوي 2.1cm أحسب زخم الالكترونات الساقطة وطاقتها الحركية.

6. ما عدد الفوتونات المنبعثة في الثانية من مصباح ضوء الصوديوم الذي قدرته 100 W علماً بأن الطول الموجي للضوء يساوي 589.3 nm ؟

الفصل الثانـي

(تحويلات لورنس وتطبيقاتـها)

1.2 تحويلات لورنس.
2.2 تباطؤ الزمن وتقلص الطول.
3.2 تحويلات السرعة – التعجيل.
4.2 تغير الكتلة مع السرعة.
5.2 العلاقة بين الطاقة والزخم.
6.2 تحويل الزخم – الطاقة – الكتلة – القوة.
7.2 انتشار الضوء في أوساط متحركة .
8.2 الزيغ في النجوم.
أمثلة محلولة
تمارين الفصل الثاني.

تحويلات لورنس وتطبيقاتها

2-1 تحويلات لورنس:

سبق أن بينا أن فكرة وجود وسط يملأ كل شيء يسمى الأثير أصبحت لا وجود لها استنادا إلى نتائج كثيرة توصل إليها العلماء في هذا الحقل وخاصة تجربة مايكلسن ومورلي. أما آينشتاين ومنذ بداية القرن العشرين وبعد هذه التجربة فقد أدخل أسلوبا جديدا يستند على فرضيتين مهمتين هما:

أولا: أن جميع قوانين الفيزياء متكافئة بالنسبة لجميع محاور الإسناد. أي أن القوانين الخاصة بالفيزياء مثل قوانين نيوتن وغيرها تبقى كما هي لا تتغير في كل مكان وفي أي زمان.

ثانياً: سرعة الضوء في الفراغ واحدة وتساوي c في جميع محاور الإسناد. أي أن سرعة الضوء ثابتة لجميع المشاهدين ولا تعتمد على أية حركة نسبية للمصدر أو المشاهد.

إذا كانت سرعة الجسيمات عالية تقرب من سرعة الضوء فإن تحويلات غاليليو لا تصح في مثل هذه الحالات، فقد لوحظ أنها تعطي نتائج غير صحيحة، فجاء لورنس ليدخل تعديلا على هذه التحويلات مستنداً على فرضيتي آينشتاين. واقترح أن القياسات المتخذة للإزاحة والزمن بالنسبة لمشاهدين في محوري إسناد

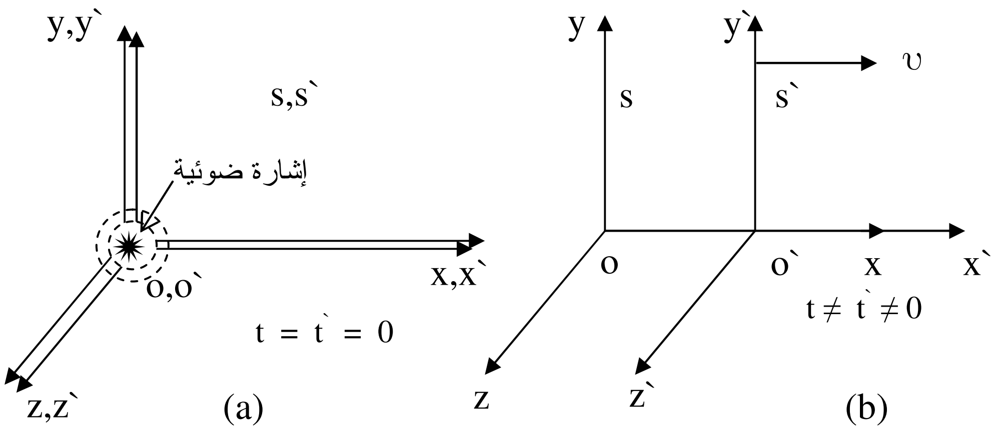
مختلفين s, s' ،(حيث أن السرعة النسبية بينهما تساوي υ) يجب أن تكتب بالصيغة:

$$x = ax' + bt' \qquad (1\text{-}2)$$

$$x' = ax - bt \qquad (2\text{-}2)$$

حيث أن b , a معاملان مناسبان ينبغي معرفتهما.

نفرض الآن أن محوري الإسناد s, s' كانا منطبقين على بعضهما في نقطة أصل مشتركة في زمن $t = t' = 0$ وفي هذه اللحظة صدرت إشارة ضوئية في تلك النقطة، كما موضح في الشكل (2-1 a).



الشكل (2-1): محورا الإسناد s`,s (a) في حالة انطباقها في زمن $t = t` = 0$
(b) في حالة انفصالها باتجاه الاحداثي x بعد زمن$t \neq t` \neq 0$.

وبعد فترة معينة من الزمن $t \neq t` \neq 0$ يكون المحور `s قد انتقل إلى موضع جديد باتجاه الاحداثي x كما في الشكل (2-1 b)، وخلال تلك الفترة تكون الإشارة الضوئية الأولى قد قطعت في s مسافة باتجاه الاحداثي x مساوية إلى:

$$x = ct \qquad (3\text{-}2)$$

وقطعت باتجاه الاحداثي `x، في محور الإسناد `s، مسافة مساوية إلى:

$$x` = ct` \qquad (4\text{-}2)$$

وتجدر الإشارة إلى أن سرعة الضوء بقيت كما هي مساوية إلى c بالنسبة لمحوري الإسناد (فرضية آينشتاين الثانية). سرعة نقطة الأصل `o كما هي مُقاسة

بالنسبة لمشاهد في s يمكن الحصول عليها بوضـــع x`=0 فـــي المعادلـــة (2-2) وسرعة نقطة الأصل o كما هي مُقاسة بالنسبة لمشاهد في s` يمكـــن الحصـــول عليها بوضع x=0 في المعادلة (2-1) فيكون:

$$\frac{x}{t}=-\frac{x`}{t`}=\frac{b}{a}=\upsilon \qquad (5\text{-}2)$$

الآن بتعويض قيمة x` من المعادلة (2-4) في المعادلة (2-1) و الاستعاضة عن x في (2-1) بما يساويها في (2-3) ينتج أن:

$$ct = at`(c-\upsilon)$$

وبالمثل بالنسبة للمعادلة (2-2) يحصل أن:

$$ct` = at\,(c+\upsilon)$$

وبضرب المعادلتين الأخيرتين في بعضهما ينتج أن:

$$c^2=a^2(c^2-\upsilon^2)$$

حيث تم اختزال المقدار tt` في طرفي المعادلة التي نتجت من عملية الضرب.
من العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$a=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

$$\therefore b=\frac{\upsilon}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

وباستبدال العامل a بآخر هو γ:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)}} \qquad (6\text{-}2)$$

إذ أن $\beta=\frac{\upsilon}{c}$،

يمكننا كتابة معادلتي التحويل (2 – 1) و (2 – 2) كالآتي:

$$x=\gamma\left(x`+\upsilon t`\right) \qquad (7\text{-}2)$$

$$x` = \gamma(x - \upsilon t) \qquad (8\text{-}2)$$

حيث تمثل المعادلة (2 – 7) تحويل إحداثي الإزاحة لموقع حدث مـــن `s إلـــى s وتمثل (2 – 8) تحويل إحداثي الإزاحة من s إلى `s.

وبما أن محوري الإسناد بينهما حركة نسبية بسرعة ثابتة باتجاه الاحداثي x فـــإن الإحداثيين الآخرين لا يتغيران خلال عملية التحويل، أي أن:

$$\left.\begin{array}{l} y = y` \ , \ y` = y \\ z = z` \ , \ z` = z \end{array}\right\} \qquad (9\text{-}2)$$

بقي لدينا الآن تحويل الزمن t و `t للحصول على معادلتي التحويـــل بعـــد الاستعانة بالمعادلتين (2 – 7) و (2 – 8).

نعوض عن x في المعادلة (2 – 8) بما يساويها في المعادلة (2 – 7) فيكون:

$$\begin{aligned} x` &= \gamma[\gamma(x` + \upsilon t`) - \upsilon t] \\ &= \gamma^2 x` + \gamma^2 \upsilon t` - \gamma \upsilon t \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma \upsilon t = (\gamma^2 - 1)x` + \gamma^2 \upsilon t` = \gamma^2 \beta^2 x` + \gamma^2 \upsilon t`$$

$$\therefore t = \gamma\left(t` + \frac{\upsilon}{c^2} x`\right) \qquad (10\text{-}2)$$

وبالمثل يمكننا إثبات أن:

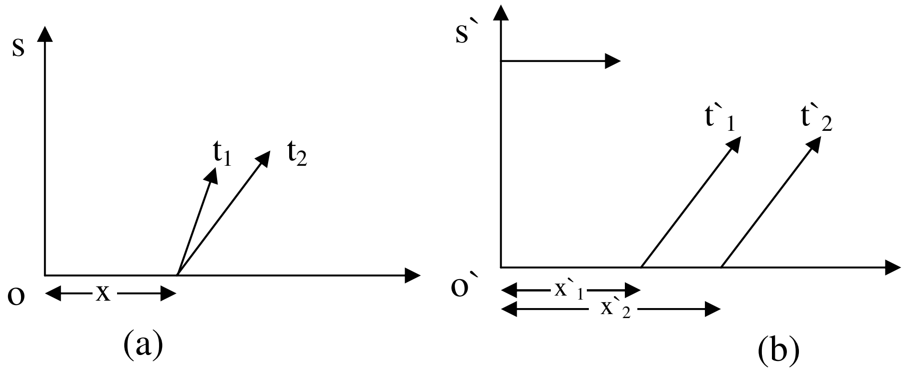
$$t` = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2} x\right) \qquad (11\text{-}2)$$

تمثل المعادلة (2 – 10) تحويل الزمن لحدث ما من محـــور الإســـناد `s إلـــى s، وتمثل المعادلة (2 – 11) تحويل الزمن من s إلى `s. تكتب الآن تحويلات لورنس كالآتي:

$$
\left.\begin{array}{ll}
x = \gamma\left(x` + \upsilon t`\right) , & x` = \gamma\left(x - \upsilon t\right) \\
y = y` , & y` = y \\
z = z` , & z` = z \\
t = \gamma\left(t` + \frac{\upsilon}{c^2}x`\right) , & t` = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)
\end{array}\right\} \qquad (12\text{-}2)
$$

2 – 2 تباطؤ الزمن وتقلص الطول:

أولاً تباطؤ الزمن:



الشكل (2 – 2): (a) حصول حدثين في موقع واحد وفي زمنين مختلفين، (b) المشاهد يلاحظ الحدثين في موقعين مختلفين وفي زمنين غير متساويين.

نفرض أنه قد حصل حدثان في محور الإسناد s في موقع واحد هو x وفي زمن t_2 ، t_1 بالنسبة لمشاهد في s، [لاحظ الشكل (2 – 2 a)]. أما بالنسبة لمشاهد في `s فيلاحظ حدوثهما في موقعين مختلفين $x`_2$, $x`_1$ وفي زمنين مختلفين $t`_1$, $t`_2$ كما في الشكل (2 – 2 b). وباستخدام تحويلات لورنس نجد أن:

$$
t`_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)
$$

$$
t`_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)
$$

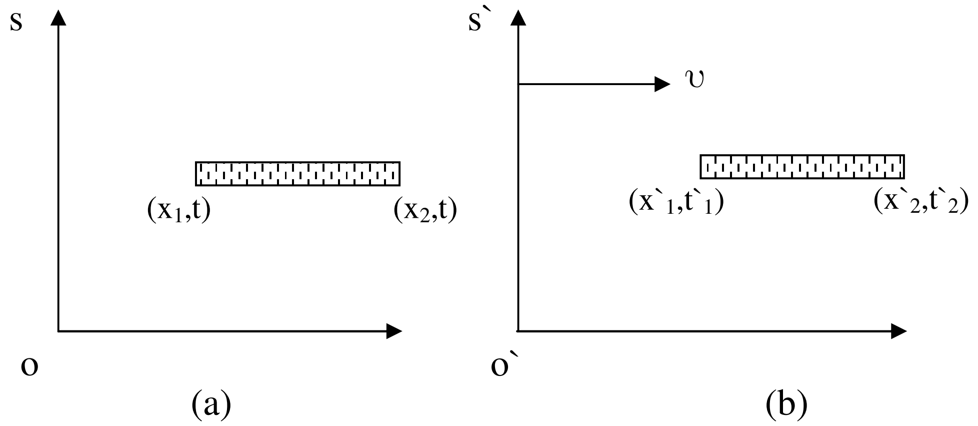
فالزمن الفعلي هو $t = t_2 - t_1$ وهي الفترة الزمنية بين الحدثين. وغير الصحيح هو $t` = t`_2 - t`_1$ وهي الفترة الزمنية بين الحدثين في `s.

وبإجراء عملية الطرح بين المعادلتين الأخيرتين ينتج أن:

$$t` = \gamma t = \frac{t}{\sqrt{\left(1 - \upsilon^2 / c^2\right)}} \qquad (13\text{-}2)$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن الفترة الزمنية بين حدثين مُقاسة بواسطة مشاهد في حالة سكون في s هي أقصر من الفترة الزمنية المقاسة بينهما من قبل مشاهد في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة ثابتة υ نسبة لمحور الإسناد s. أي أن أجهزة قياس الزمن تسجل فترات زمنية أطول بين حدثين إذا كانت في حالة حركة مما هي عليه في حالة سكون، وهكذا جاء الاصطلاح تباطؤ الزمن.

ثانياً: تقلص الطول:



الشكل (2 – 3): (a) المشاهد في s يمكنه قياس إحداثيات طرفي الجسم في زمن واحد، (b) المشاهد يمكنه قياس إحداثيات طرفي الجسم ولكن في زمنين مختلفين.

من الممكن قياس إحداثيات جسم يتحرك في `s من قبل مشاهد في s في زمن واحد هو t. نفرض أن قضيباً في محور الإسناد `s ينطبق طوله على الاحداثي `x كما هو ملاحظ في الشكل (2 – 3 b) ونفرض أن قياس أحد طرفيه $x`_1$ قد تم في زمن $t`_1$ وقياس طرفه الآخر $x`_2$ قد تم في زمن $t`_2$ من قبل مشاهد في `s. فإذا كان قياس طرفي القضيب نفسه هو x_1 و x_2 في زمن واحد هو t من قبل مشاهد في s، كما في الشكل (2–3 a)، يكون بعد الاستعانة بمعادلات لورنس أن:

$$x`_1 = \gamma(x_1 - \upsilon t)$$
$$x`_2 = \gamma(x_2 - \upsilon t)$$
$$\therefore x`_2 - x`_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

والآن طول الجسم الفعلي هو $L`=x`_2-x`_1$ و غير الفعلي هو $L=x_2-x_1$، إذن:

$$L`=\gamma L=\frac{L}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} \qquad (14\text{-}2)$$

وبما أن $\gamma > 1$ لذلك فان القضيب إذا كان في حالة حركة بالنسبة لمشاهد في حالة سكون فإن بعد القضيب يتقلص باتجاه حركته.

2-3 تحويلات السرعة - التعجيل.

أولا: تحويل السرعة:

لنفرض أن جسيما في محور الإسناد `s يتحرك بسرعة $\vec{u}`$ باتجاه معين، والمطلوب حساب سرعته $\vec{u}$ في محور الإسناد s علما بأن السرعة النسبية بين محوري الإسناد باتجاه الاحداثي x تساوي υ. ولكي نفهم عملية تحويل السرعة ينبغي علينا أن نحلل السرعة في أي محور، إلى مركباتها باتجاه الإحداثيات المتعامدة x,y,z فيكون:

$$\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{i}}\,u_x+\vec{\mathbf{j}}\,u_y+\vec{\mathbf{k}}\,u_z$$

$$\vec{\mathbf{u}}`=\vec{\mathbf{i}}\,u`_x+\vec{\mathbf{j}}\,u`_y+\vec{\mathbf{k}}\,u`_z$$

$$\therefore u_x=\frac{dx}{dt} \qquad ,u`_x=\frac{dx`}{dt`} \qquad ,\frac{dx}{dt`}=\frac{dx}{dt}.\frac{dt}{dt`}$$

وباستخدام تحويلات لورنس نحصل على:

$$x=\gamma(x`+\upsilon t`) \quad , \quad t=\gamma\left(t`+\frac{\upsilon}{c^2}x`\right)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt`}=\gamma(u`_x+\upsilon) \quad , \quad \frac{dt}{dt`}=\gamma\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right)$$

$$\therefore \gamma u_x\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right)=\gamma(u`_x+\upsilon)$$

$$\therefore u_x = \frac{u`_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u`_x} \qquad (15\text{-}2)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$u`_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x} \qquad (16\text{-}2)$$

وبنفس الطريقة نكتب:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy/dt`}{dt/dt`}$$

$$= \frac{dy`/dt`}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2} u`_x\right)}$$

$$\therefore u_y = \frac{u`_y/\gamma}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u`_x} \qquad (17\text{-}2)$$

وبإتباع الطريقة نفسها مرة أخرى نجد أن:

$$u_z = \frac{u`_z/\gamma}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u`_x} \qquad (18\text{-}2)$$

وبما أن: $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ من الممكن التعبير عن u بدلالة `u بعد الاستعانة بمعادلات تحويل السرعة أعلاه فيكون:

$$u^2 = \frac{(u`_x + \upsilon)^2 + \left(u`^2 - u`^2_x\right)/\gamma^2}{\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2} u`_x\right)^2} \qquad (19\text{-}2)$$

ثانيا: تحويل التعجيل:

إذا كان الجسيم يتحرك بتعجيل منتظم هو $\vec{a}`$ في محور الإسناد `s باتجاه معين، فمن الممكن استخدام معادلات تحويل السرعة لإيجاد تعجيله $\vec{a}$ في محور الإسناد s.

نكتب الآن العلاقات الآتية:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du_x}{dt`}.\frac{dt`}{dt} = \frac{d}{dt`}\left\{\frac{u`_x + \upsilon}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x}\right\}.\frac{d}{dt}\left\{\gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)\right\}$$

وبعد إجراء عمليات التفاضل والاختزال، وترتيب الحدود نصل إلى النتيجة النهائية:

$$a_x = \frac{a`_x/\gamma^3}{\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right)^3} \qquad (20\text{-}2)$$

بنفس الطريقة يمكننا الحصول على معادلات تحويل مشابهة لكل من المركبة $\vec{a}_y$ و $\vec{a}_z$ ومن ثم حساب التعجيل $\vec{a}$ بدلالة $\vec{a}`$. من العلاقة (2 – 19) نحصل على:

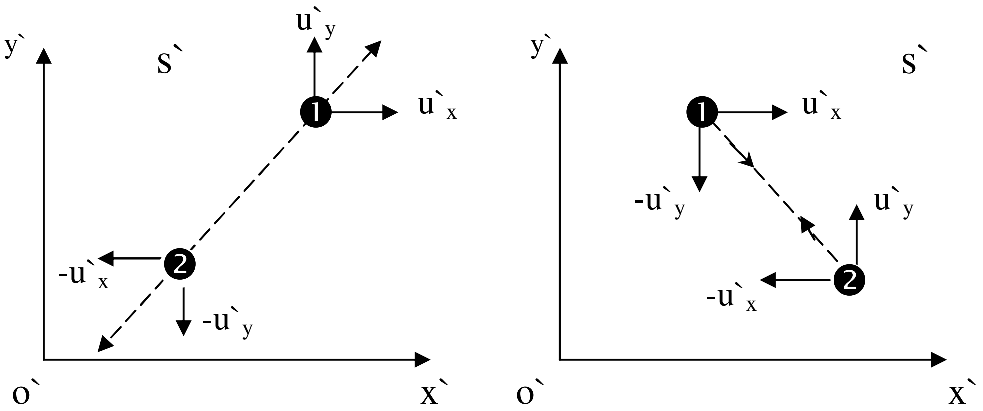
$$1-u^2/c^2 = 1-\frac{\left(\frac{u`_x}{c}+\frac{\upsilon}{c}\right)^2+\left(\frac{u`^2}{c^2}-\frac{u`^2_x}{c^2}\right)\Big/\gamma^2}{\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right)^2}$$

ومن هذه العلاقة الأخيرة نصل إلى معادلة التحويل الآتية:

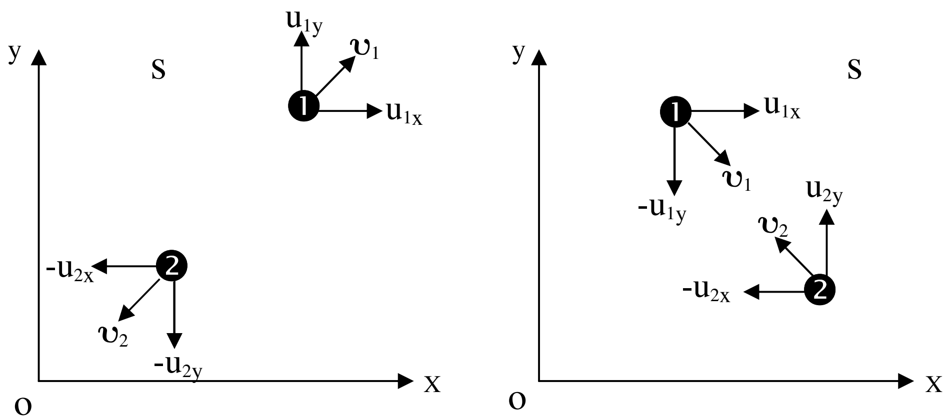
$$\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{\left(1-u`^2/c^2\right)}}{\gamma\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right)} \qquad (21\text{-}2)$$

هذه العلاقة الأخيرة مهمة، إذ تستخدم في تحويلات الزمن والطاقة التي ستتم مناقشتها في بند لاحق.

2 – 4 تغير الكتلة مع السرعة:



الشكل (2 – 4): محور الإسناد `s حيث تشاهد مركبات السُرع لكرتين قبل وبعد التصادم بفرض إن التصادم مرن وتام.



الشكل (2 – 5): محور الإسناد s حيث تشاهد مركبات السُرع لكرتين قبل وبعد التصادم بفرض أن التصادم مرن وتام.

لابد لنا الآن أن ندرس المسألة الأساسية وهي كيفية تأثير تحويلات السرعة النسبية على قوانين الحركة لجسيم إذا ما اعتبرنا القوى والكتل.

لندرس تصادم جسيمين متماثلين، ولنفرض أن التصادم تام المرونة بحيث يرتد الجسيمان دون تغيير في انطلاقهما النسبي. لنفرض أن مشاهداً في محور الإسناد `s يلاحظ الجسيمين يقترب أحدهما من الآخر على طول مسارين

متوازيين بسرعتين متساويتين ومتعاكستين، كما في الشكل (2 – 4) قبل أن يحدث أي تصادم بينهما.

وتحدث الحركة كلياً في المستوى $x`,y`$. وقد صنف الجسيمان برقمين ❶ و ❷ ومركبتا سرعتيهما الابتدائيتان قبل التصادم بـ $(u`_x,-u`_y)$ و $(-u`_x,u`_y)$ على الترتيب. ويعاني كل من الجسيمين بعد التصادم انعكاساً في اتجاه مركبتي سرعتيهما باتجاه الاحداثي $y`$، أما مركبتاهما باتجاه الاحداثي $x`$ فتبقيان دون تغيير. إذن المركبتان النهائيتان لسرعة كل منهما بعد التصادم هما $(u`_x,u`_y)$ و $(-u`_x,-u`_y)$ كما هو موضح في الشكل (2 – 4).

لنصف **الآن** نفس التصادم كما هو ملاحظ من قبل مشاهد في محور الإسناد s، فتكون مركبتا سرعة الجسيم الأول قبل التصادم مساوية إلى $(u_{1x},-u_{1y})$ ومركبتا سرعة الجسيم الثاني $(-u_{2x}, u_{2y})$. وبعد التصادم يعاني كل من الجسيمين انعكاساً في اتجاه مركبتي سرعتيهما في اتجاه الاحداثي y بينما تبقى مركبتا السرعة لكل منهما دون تغيير باتجاه الاحداثي x كما هو ملاحظ في الشكل (2 – 5). فالقيم النهائية تكون إذن للجسيمين (u_{1x},u_{1y}) و $(-u_{2x},-u_{2y})$. ووفقاً لقواعد تحويلات السرعة نحصل على سرعة الجسيم الأول بعد التصادم:

$$u`_x=\frac{u_{1x}-\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_{1x}} \quad , \quad u`_y=\frac{u_{1y}/\gamma}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_{1x}}$$

وبالمثل نحصل على سرعة الجسيم الثاني بعد التصادم:

$$-u`_x=\frac{-u_{2x}-\upsilon}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u_{2x}} \quad , \quad -u`_y=\frac{-u_{2y}/\gamma}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u_{2x}}$$

وعند حذف $u`_x$ و $u`_y$ من هذه العلاقات ينتج أن:

$$\frac{u_{1y}}{u_{2y}}=\frac{u_{1x}-\upsilon}{u_{2x}+\upsilon}=\frac{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_{1x}}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u_{2x}}$$

وإذا حذفنا υ من هذه المعادلات الأخيرة نحصل بعد إجراء بعض العمليات الجبرية، على العلاقة الآتية:

$$\frac{u_{1y}}{\sqrt{\left(1-\upsilon_1^2/c^2\right)}}=\frac{u_{2y}}{\sqrt{\left(1-\upsilon_2^2/c^2\right)}} \qquad (22\text{-}2)$$

حيث أن:

$$\upsilon_1^2=u_{1x}^2+u_{1y}^2$$
$$\upsilon_2^2=u_{2x}^2+u_{2y}^2$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن u_{1y} لا تساوي u_{2y} كما هي مشاهدة من قبل ملاحظ في محور الإسناد s بعد التصادم وذلك لاختلاف السرعتين υ_1 و υ_2.

إذن، إذا كانت كُتلتا الجُسيمين متساويتين، فالمركبتان u_{1y} و u_{2y} تعطيان زخمين غير متساويين، أي سوف لن يكون عندنا زخم خطي محفوظ. لذلك أمامنا اختياران، إما أن ننبذ قانون حفظ الزخم الخطي أو علينا أن نفرض أن كتلة الجسيم تعتمد بطريقة ما على حركة الجسيم بالنسبة لمشاهد معين. وبدلاً من نبذ قانون الزخم الخطي اخترنا البديل الآخر.

نفرض الآن أن كتلة الجسيم الأول الذي سرعته υ_1 كما هي مُقاسة في محور الإسناد s مساوية إلى m_1 وللجسيم الثاني الذي سرعته υ_2 كما هي مُقاسة في هذا المحور مساوية إلى m_2. نطبق قانون حفظ الزخم بالنسبة للجسيمين في محور الإسناد s فيكون باتجاه الاحداثي y:

$$-m_1u_{1y}+m_2u_{2y}=-m_2u_{2y}+m_1u_{1y}$$

$$\therefore\frac{m_1}{m_2}=\frac{u_{2y}}{u_{1y}}=\frac{\sqrt{\left(1-\upsilon_2^2/c^2\right)}}{\sqrt{\left(1-\upsilon_1^2/c^2\right)}} \qquad (23\text{-}2)$$

نفرض الآن أن $m_2=m_0$ عندما تكون $\upsilon_2=0$، كتلة الجسيم عند السكون، وأن $m_1=m$ عندما تكون $\upsilon_1=u$، كتلة الجسيم المتحرك بسرعة تساوي u.

$$\therefore\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} \qquad (24\text{-}2)$$

ومن الجدير بالذكر أنه لو فرضنا أن كتلة الجسيم تبقى ثابتة حتى لو تغيرت سرعته، فإن قانون حفظ الزخم لا يبقى محفوظاً.

$$\therefore m(-u_{1y}+u_{2y})=m(-u_{2y}+u_{1y})$$

ومن هذا ينتج أن: $u_{1y}= \quad u_{2y}$ وهذا يناقض العلاقة الأخيرة التي توصلنا إليها، وثبت فيها أن $u_{1y}\neq u_{2y}$ أي العلاقة (2 – 12). إذن لابد أن نعتبر أن الكتل تتغير تبعاً للسرعة وأن قانون حفظ الزخم محفوظ.

2 – 5 العلاقة بين الطاقة والزخم:

لنفرض أن جسيماً كتلته الساكنة m_0، أثرت عليه قوة $\vec{f}$. فإذا كانت الإزاحة باتجاه القوة هي $d\vec{\ell}$ فإن الشغل المنجز dw سيكون مساوياً إلى:

$$dw=\vec{f}.d\vec{\ell}=fd\ell$$

وإذا اعتبرنا أن هذا الشغل قد تحول إلى طاقة حركية dT فإن:

$$dT=fd\ell=\frac{d}{dt}(mu)d\ell=d(mu)\frac{d\ell}{dt}$$

$$\therefore dT=u\ \ d(mu)$$

$$\therefore dT=u^2dm+mudu \qquad (25\text{-}2)$$

إذ أن u سرعة الجسيم باتجاه الإزاحة.

وبما أن:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$$

$$\therefore m^2c^2=m^2u^2+m_0^2c^2$$

ومن هذه العلاقة نحصل على:

$$c^2dm=u^2dm+mudu \qquad (26\text{-}2)$$

بمقارنة العلاقتين (2–25) و (2–26) نستنتج أن:

$$dT=c^2dm$$

وبأجراء عملية التكامل لطرفي هذه العلاقة الأخيرة يحصل أن:

$$T=\int_{m_0}^{m}c^2\ dm=c^2(m-m_0)$$

$$\therefore T+m_0c^2=mc^2 \qquad (27\text{-}2)$$

حيث أن mc^2 تسمى الطاقة الكلية للجسيم وأن m_0c^2 تسمى طاقة السكون للجسيم وعليه نكتب العلاقات الآتية:

$$\mathcal{E} = T + m_0c^2$$

$$\mathcal{E} = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \qquad (28\text{-}2)$$

$$T = \mathcal{E} - m_0c^2$$

إذا فرضنا أن $\vec{p}$ هو زخم الجسيم يكون:

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \qquad (29\text{-}2)$$

وبتربيع طرفي المعادلة الأخيرة ثُم إضافة $m_0^2c^2$ إلي الناتج يحصل:

$$p^2 + m_0^2c^2 = \frac{m_0^2u^2}{1 - u^2/c^2} + m_0^2c^2$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة الأخيرة بالعامل c^2 ينتج:

$$c^2p^2 + \left(m_0c^2\right)^2 = \frac{m_0^2c^2u^2}{1 - u^2/c^2} + m_0^2c^4$$

$$= \frac{m_0^2c^4}{1 - u^2/c^2} = \mathcal{E}^2$$

$$\therefore \mathcal{E} = c\sqrt{\left(P^2 + m_0^2c^2\right)} \qquad (30\text{-}2)$$

هذه العلاقة مهمة جداً إذ تستعمل في مواضيع الفيزياء النووية للطاقات العالية لحساب الطاقة الكلية لجسيم عندما يعرف زخمه أو العكس.

وبإجراء عملية التفاضل لطرفي المعادلة (2 – 30) بالنسبة للزخم نحصل على:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{pc}{\sqrt{(p^2 + m_0^2c^2)}} = \frac{pc^2}{c\sqrt{(p^2 + m_0^2c^2)}} = \frac{pc^2}{\mathcal{E}}$$

وبما أن $\mathcal{E} = mc^2$ و أن $\vec{p} = m\,\vec{u}$ ينتج أن:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dp} = u \qquad (31\text{-}2)$$

2 – 6 تحويل الزخم – الطاقة – الكتلة – القوة:

أولاً تحويل الزخم:

نكتب مركبات الزخم لجسيم في محور الإسناد s كالآتي:

مركبة الزخم باتجاه الاحداثي x تساوي:

$$P_x = mu_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$$

ويكتب هذا الزخم في محور الإسناد `s بالصيغة:

$$p`_x = m`u`_x = \frac{m_0 u`_x}{\sqrt{(1-u`^2/c^2)}}$$

$$\because u`_x = \frac{u_x - \upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{(1-u`^2/c^2)}} = \frac{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$$

$$\therefore p`_x = \frac{\gamma m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}.(u_x - \upsilon) = \gamma(mu_x - \upsilon m)$$

وبما أن $\mathcal{E} = mc^2$ و $P_x = mu_x$ نحصل على:

$$p`_x = \gamma(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}\varepsilon) \qquad (32\text{-}2)$$

وبالمثل يمكننا أثبات أن:

$$p`_y = p_y$$

$$p`_z = p_z$$

ثانياً: تحويل الطاقة:

نفرض أن جسيماً طاقته الكلية في محور الإسناد s تساوي $\mathcal{E}$ وزخمه p_x وفي محور الإسناد `s تساوي $\mathcal{E}`$ وأن زخمه يساوي $p`_x$

$$\therefore \mathcal{E}` = m`c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-u`^2/c^2)}} = \frac{\gamma m_0 c^2\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$$

$$= \gamma mc^2\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right) = \gamma\left(mc^2 - \upsilon m u_x\right)$$

$$\therefore \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x) \qquad (33\text{-}2)$$

و بنفس الطريقة يمكننا إثبات العلاقات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \gamma\left(p`_x + \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'\right) \\ p_y &= p`_y \\ p_z &= p`_z \\ \mathcal{E} &= \gamma\left(\mathcal{E}` + \upsilon p`_x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (34\text{-}2)$$

من العلاقة (2 – 30) يمكننا أن نكتب:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

وبالمثل في محور الإسناد `s يمكننا أن نكتب:

$$\frac{\mathcal{E}`^2}{c^2} - p`^2 = m_0^2 c^2$$

ومن هذا ينتج أن:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = \frac{\mathcal{E}`^2}{c^2} - p`^2 = m_0^2 c^2 \qquad (35\text{-}5)$$

نستنتج مما تقدم أن الكمية $\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - P^2$ تبقى دون تغيير بالنسبة لجميع محاور الإسناد لجسيم كتلته الساكنة m_0.

ثالثاً : تحويل الكتلة:

نفرض أن جسيماً في محور الإسناد s يتحرك بسرعة تساوي $\vec{u}$ و كتلته تساوي m. وفي محور الإسناد `s تكون كتلته مساوية إلي `m عندما كانت سرعته مساوية إلي $\vec{u}`$. فإذا كانت m_0 تمثل الكتلة الساكنة لهذا الجسيم فإن:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}}$$

$$m` = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u`^2/c^2)}}$$

و بالاستعانة بالعلاقة (2–21) نحصل على:

$$m' = m\frac{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}{\sqrt{\left(1-u^{`2}/c^2\right)}} =$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore m` &= \gamma m \left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right) \\ m &= \gamma m` \left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u`_x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (36\text{-}2)$$

رابعاً: تحويل القوة.

بما أن القوة $\vec{f}`$ المؤثرة على جسيم كما هي مُقاسة في محـــور الإســـناد `s تساوي معدل التغير الذي يحصل في زخم الجسيم $\vec{p}`$ تكون:

$$\vec{f}` = \frac{d\vec{p}`}{dt`}$$

ينتج من المعادلة (2–32) و معادلة تحويل الزمن أن:

$$f`_x = \frac{dp`_x}{dt`} = \frac{dp`_x/dt}{dt`/dt} = \frac{\gamma\left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\therefore f`_x = \frac{f_x - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt}}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}$$

حيث أن $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ تمثل معدل التغير في الطاقة الكلية لجسيم بالنسبة للزمن في محـــور الإسناد s. وفي الميكانيك النسبي وجدنا أن:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= c^2p^2 + m_0^2c^4 \\ &= c^2\vec{p}.\vec{p} + m_0^2c^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{E}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2\frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{p}$$

و بما أن $\mathcal{E} = mc^2$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{f}.\left(\frac{\vec{p}}{m}\right) = \vec{f}.\vec{u}$$

و هذه العلاقة تمثل معدل الشغل الذي تنجزه القوة في وحدة الزمن (القدرة)

$$\therefore\ f`_x = \frac{f_x - \frac{\upsilon}{c^2}\vec{u}\cdot\vec{f}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} \qquad (37\text{-}2)$$

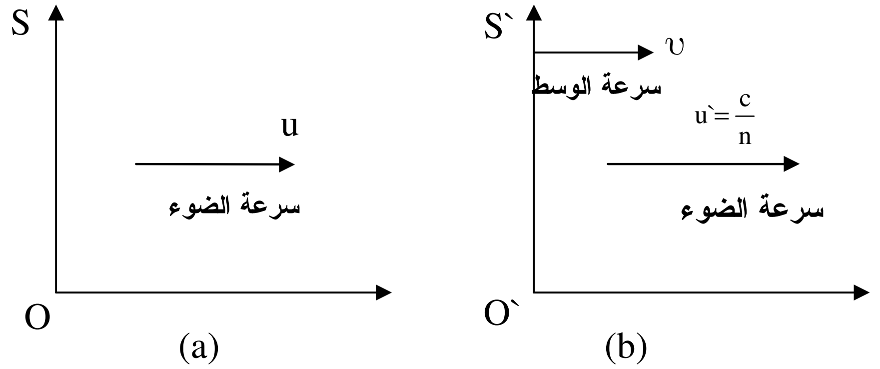
و بإتباع نفس الطريقة نحصل على:

$$f`_y = \frac{f_y/\gamma}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} \qquad (38\text{-}2)$$

$$f`_z = \frac{f_z/\gamma}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} \qquad (39\text{-}2)$$

ومن الملاحظ فيما يتعلق بالمعادلة (2 – 37) هو إنها توضح لنا أن قياس أية قـوة في محور إسناد معين كالمحور `s يعني قياس القدرة المتولدة بواسطة تلك القـوة في محور إسناد آخر وهذه الصفة لا يمكن أن نجدها في الميكانيك الكلاسيكي، أو التقليدي. وتجدر الإشارة إلى أن المعادلات أعلاه تمثل تحويل القوة مـن محـور الإسناد s إلي `s وإذا أردنا أن نحول القوة من محور الإسناد `s إلي s علينـا أن نعكس إشارة υ فقط .

2 – 7 انتشار الضوء في أوساط متحركة .



الشكل (2 – 6): (a) الضوء يتحرك باتجاه الاحداثي x بسرعة u. (b) تتغير سرعة الضوء إلى `u كما هي مُقاسة من قِبل مشاهد في `s.

لقد بينا سابقاً في تجربة مايكلسن ومورلي كيفية جمع السُــرع، وكانــت إحــداها سرعة الضوء في الفراغ . لنطبق هذه الطريقة في مسألة انتشــار الضــوء فــي أوساط متحركة.

نفرض أن لدينا سطحاً شفافاً كالزجاج أو الماء يتحرك بسرعة ثابتة تســاوي υ نمثله بمحور الإسناد `s كما موضح في الشكل (b 6-2). ولنفــرض أن ســرعة الضوء كما هي مُقاسة من قِبل مشاهد في هذا المحور تساوي `u. فإذا كان معامل انكسار الوسط هو n فإن:

$$u` = \frac{c}{n}$$

ومن تحويل السرعة تكون سرعة الضوء u كما هي مُقاسة من قبل مشاهد فــي s مساوية إلى:

$$u = \frac{c/n + \upsilon}{1 + \upsilon/nc}$$

وبما أن $\upsilon << c$ نستطيع فك هذا المقدار بقوى تصاعدية للنسبة υ/c ثم ترك جميع الحدود التي هي أعلى من الحد الأول:

$$\therefore\ u = \frac{c}{n}\left(1 + n\,\frac{\upsilon}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\frac{\upsilon}{c}\right)^{-1}$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n\,\upsilon}{c}\right)\left(1 - \frac{\upsilon}{nc} + \ldots\right)$$

$$\cong \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n\,\upsilon}{c} - \frac{\upsilon}{nc}\right)$$

$$\therefore\ u = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\upsilon \qquad (40\text{-}2)$$

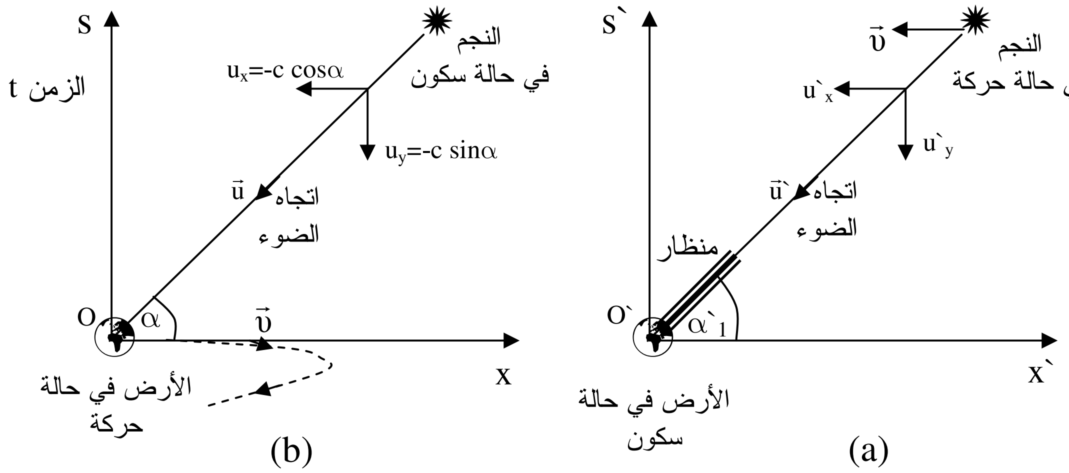
يسمي المقدار $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ بمعامل فرينل الساحب للضوء.

هكذا نرى كيف أن طريقة جمع السُرع النسبية أوصلتنا إلي النتيجة التي سبق أن حصل عليها فرينل وآخرون مختصون في موضوع الأثير إذ كــان علــيهم أن

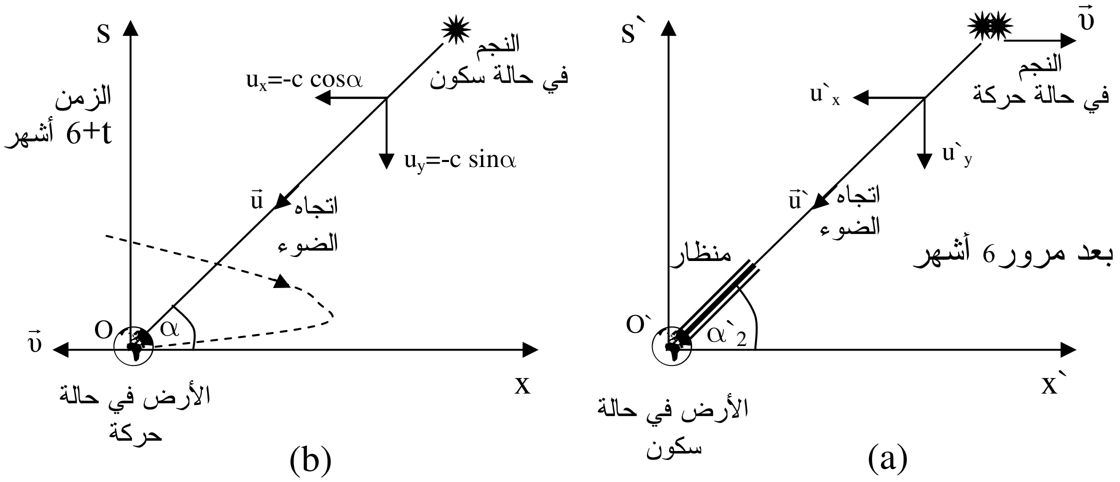
يعطوا تفسيراً بأن الضوء يسلك كما لو أن جزءاً أضيف إليه من سرعة الوسط المادي الذي ينتشر فيه كما توضحه العلاقة (2-40). وقبل ظهور الميكانيك النسبي لآينشتاين بقيت هذه الظاهرة مبهمة ومحيرة وأن تفسيرها كان غير مقنع. ولكن بالنسبة لآينشتاين فإن تلك النتيجة لعبت دوراً متميزاً ساعدت على بزوغ النظرية النسبية الخاصة.

2 – 8 الزيغ في النجوم:

اكتشفت ظاهرة الزيغ من قبل الفلكي برادلي سنة 1728 فقد لاحظ تغيراً في الموضع الظاهري للنجم خلال فترات زمنية مختلفة من السنة. وقد أعزى هذا إلى السرعة المحدودة للأرض وهي تتحرك في مدارها حول الشمس. وقد أمكن تفسير هذه الظاهرة بواسطة نظرية الجسيم باستخدام تحويلات لورنس للسرعة وفسرت كذلك بواسطة النظرية الموجية على اعتبار أن الأثير لا يشارك في أي تغيير يحصل في اتجاه سرعة الأرض بالنسبة إلي الشمس.



الشكل (2 – 7): (a) النجم في حالة حركة والأرض في حالة سكون نسبة لمشاهد في `s. (b) النجم في حالة سكون ولكن الأرض تتحرك في مسارها نسبة لمشاهد في s.



الشكل (2 – 8): (a) حركة النجم بعد مرور ستة اشهر، الأرض ساكنة. (b) النجم في حالة سكون بعد مرور أكثر من ستة اشهر، الأرض متحركة.

لنعتبر أن محور الإسناد s الذي فيه كل من النجم والشمس ساكن. ولنفرض أن الأرض تتحرك بسرعة υ في محور الإسناد s باتجاه الاحداثي x كما موضح في الشكل (2 – 7 b)، في محور الإسناد `s تكون الأرض إذن ساكنة. نفرض أيضاً أن الضوء يميل عن الاحداثي x الموجب بالزاوية $\alpha, \alpha`_1$ في s`,s على التوالي كما موضح في الشكل (2 – 7 a). في محور الإسناد s نجد أن سرعة الضوء لها المركبات الآتية:

$$u_x = -c \ \cos\alpha \ , \quad u_y = -c \ \sin\alpha \ , \quad u_z = 0$$

وبالنسبة لمعادلات تحويل السُرع من s إلى `s نلاحظ:

$$u`_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x} = \frac{-c\cos\alpha - \upsilon}{1 + \beta\cos\alpha} \quad , \quad \beta = \frac{\upsilon}{c}$$

$$u`_y = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x} = \frac{-c\sin\alpha/\gamma}{1 + \beta\cos\alpha}$$

وبقسمة المعادلتين على بعضهما نحصل على الآتي:

$$\tan\alpha_1' = \frac{u`_y}{u`_x} = \frac{\tan\alpha/\gamma}{1 + \beta\sec\alpha} \qquad (41\text{-}2)$$

وتمثل الزاوية $\alpha`_1$ ميل المنظار عن الاحداثي $x`$ لكي ينفذ الضوء داخل المنظار باتجاه محوره عندما تكون الأرض في حالة حركة بالاتجاه المبين في الشكل. ويلاحظ أن $\alpha`_1 < \alpha$.

وبعد مرور فترة زمنية تساوي ستة أشهر تكون الأرض في حالة حركة بالاتجاه المعاكس نسبة إلى الشمس كما مبين في الشكل (b8 – 2). وهذا التغير في الاتجاه يعادل أن نجعل المنظار في حالة حركة من محور الإسناد الذي كان متحركاً بسرعة $+\upsilon$ نسبة إلى s إلي محور إسناد آخر يتحرك بسرعة $-\upsilon$ نسبة إلى s. وبعد مرور ستة أشهر فان الضوء القادم من النجم يميل عن الاحداثي $x`$ بزاوية مختلفة تساوي $\alpha`_2$، كما هو موضح في الشكل (a 8 – 2)، إذ أن:

$$\tan \alpha`_2 = \frac{\tan \alpha/\gamma}{1-\beta \sec \alpha} \qquad (42\text{-}2)$$

وبما أن $\alpha`_2$ لا تساوي $\alpha`_1$ فان ميل محور المنظار الذي هو ساكن على الأرض يجب أن يتغير خلال فترة الستة أشهر لو أريد بقاء النجم في مجال الرؤية.

ولما كان:

$$\upsilon = 3\,x10^4\ ms^{-1} \quad , \quad c = 3\,x10^8\ ms^{-1}$$

فان الحدود المتضمنة $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ يمكن إهمالها، أي أن $\gamma \cong 1$

$$\therefore\ \tan \alpha'_1 = \tan \alpha (1 + \beta \sec\alpha\ )^{-1}$$

$$\therefore\ \tan \alpha'_1 = \tan \alpha - \frac{\beta \tan \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\therefore\ \tan \alpha'_1 - \tan \alpha = \frac{-\beta \tan \alpha}{\cos \alpha} \qquad (43\text{-}2)$$

لنجعل الآن:

$$\tan \alpha'_1 = \tan(\alpha + \Delta\alpha) \quad , \quad \Delta\alpha << \alpha$$

$$\because \tan(\alpha + \Delta\alpha) \cong \tan \alpha + \Delta\alpha\ \sec^2 \alpha$$

$$\therefore \tan(\alpha + \Delta\alpha) - \tan \alpha = \Delta\alpha\ \sec^2 \alpha \qquad (44\text{-}2)$$

وبمقارنة المعادلتين (2–43) و (2–44) نجد أن:

$$\Delta\alpha \sec^2 \alpha = -\frac{\beta \tan \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\therefore \Delta\alpha = -\frac{\upsilon}{c} \sin \alpha \qquad (45\text{-}2)$$

وهذا يعني أن $\alpha`_1$ أقل من $\alpha$ وعليه فالمنظار يجب أن يميل بزاوية أقل من $\alpha$ مع الأفق في محور الإسناد `s عندما تكون الأرض في حالة حركة بالاتجاه الموضح في الشكل (2–7 b) وبالمثل وبعد مرور ستة أشهر فإن:

$$\Delta\alpha = \frac{\upsilon}{c}\sin\alpha \qquad (46\text{-}2)$$

وفي هذه الحالة يكون ميل محور المنظار عن الأفق في محور الإسناد `s بزاوية اكبر من الزاوية α.

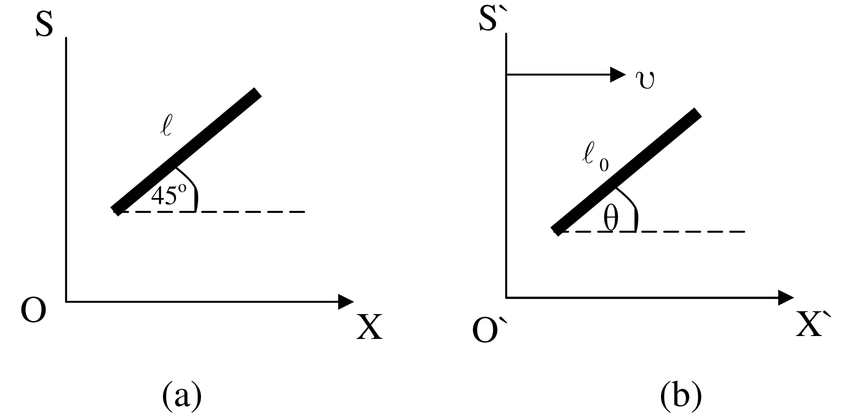
نستنتج مما تقدم أن الملاحظات عن الزيغ التي نوقشت من قبل برادلي في ذلك الوقت قبل ظهور النظرية النسبية هي حالة مقاربة لما توصلنا إليه باستخدام تحويلات السرعة ومحاور الإسناد.

أمثلة محلوله:

المثال (1)

ساق طولها ℓ_0 في حالة سكون في المستوي `x`-y كما هي مُقاسة في محور الإسناد `s وتصنع زاوية $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ مع الاحداثي `x. في محور الإسناد s لوحظ أن الساق تصنع زاوية 45° مع الاحداثي x. **أولاً:** ما هي السرعة النسبية بين محوري الإسناد؟ **ثانياً:** ما طول الساق في s ؟

الحل:



الشكل (2 – 9): (a)الساق تتحرك باتجاه الاحداثي x. (b) الساق في حالة سكون وتصنع زاوية θ مع الاحداثي `x.

الشكل (2 – 9) يوضح محوري إسناد s`,s بينهما سرعة نسبية υ وأن الساق في `s ساكنة وطولها ℓ_0 وهو الطول الصحيح، بينما تشاهد في حالة حركة بسرعة υ باتجاه الاحداثي x في s و بفرض أن طولها في هذا المحور يساوي ℓ، ومن العلاقة (2 – 14) نجد أن الساق تتقلص بعدها باتجاه الحركة بينما تبقى بعدها كما هي باتجاه عمودي علي حركتها.

أولاً:

$$\therefore \ell_0 \cos\theta = \gamma \ell \cos 45 \qquad (1)$$

$$\ell_0 \sin\theta = \ell \sin 45 \qquad (2)$$

وبقسمة (1) على (2) يحصل أن:

$$\gamma \cot 45 = \cot\theta = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \frac{\upsilon}{c} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ثانياً: بتربيع طرفي المعادلتين (1) و (2) ثم جمعهما ينتج:

$$\ell_0^2 = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^2\right)\ell^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{16}{9}\right)\ell^2 = \frac{25}{18}\ell^2$$

$$\therefore \quad \ell^2 = \frac{18}{25}\ell_0^2$$

$$\therefore \quad \ell = \frac{3\sqrt{2}}{5}\ell_0$$

المثال (2)

شوهد حدثان في آن واحد وفي زمن t=0 في محور الإسناد s وكان موقع الحدث الأول في النقطة (0,0,0) وموقع الحدث الثاني في النقطة (x,0,0). مُشاهد أخر في محور الإسناد `s لاحظ أن الفترة الزمنية بين الحدثين هي T. باستخدام تحويلات لورنس أثبت أن السرعة النسبية بين محوري الإسناد هي $\upsilon = c\left(1 + x^2/c^2T^2\right)^{-1/2}$.

الحل:

نكتب أولاً تحويلات لورنس للإزاحة والزمن:

$$x' = \gamma(x - \upsilon t) \qquad , \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$$

في محور الإسناد s نجد أن:

$$t_1 = t_2 = 0 \quad , \quad t_2 - t_1 = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = x \quad , \quad x_2 - x_1 = x$$

في محور الإسناد `s نجد أن:

$$t`_2 - t`_1 = -T$$

$$= \gamma\left(t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x_1\right)$$

$$\therefore\ -T = -\gamma\frac{\upsilon}{c^2}x \quad \Rightarrow \quad \therefore\ T = \gamma\frac{\upsilon}{c^2}x$$

$$\because \gamma = \left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \upsilon^2/c^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{T^2} = \frac{c^4}{\upsilon^2 x^2}\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)$$

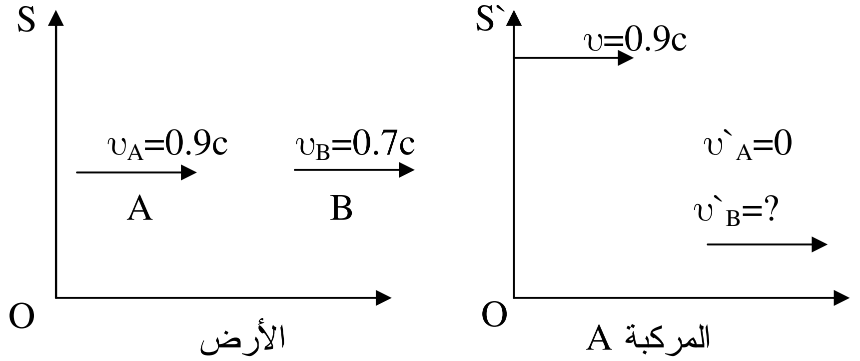
ومن هذه العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$\upsilon = c\left(1 + x^2/T^2c^2\right)^{-1/2}$$

المثال (3):

مركبة فضائية معادية A تتابع أخرى B متقدمة أمامها بسرعة فائقة تساوي 0.7c كما هي مُقاسة من قبل مشاهد على الأرض وكانت سرعة المركبة A تساوي 0.9c تسير بالاتجاه نفسه. ما هي سرعة المركبة B نسبة للمركبة A؟

الحل:



الشكل (2 – 10): (a) الأرض في حالة سكون بالنسبة للمشاهد في s. المركتيان باتجاه واحد. (b) المركبة A في حالة سكون بالنسبة لمشاهد في `s. المركبة B في حالة حركة.

في الشكل (2 – 10) نرى أن محور الإسناد s يمثل الأرض وأن محور الإسناد `s يمثل المركبة A الذي يتحرك بسرعة $\upsilon = 0.9c$ باتجاه الاحداثي x نسبة إلي محور الإسناد s، حيث أن المركبة A تكون في حالة سكون في `s. إذن سرعة المركبة B في `s هي سرعتها نسبة للمركبة A.

نطبق الآن معادلات تحويل السُرع من s إلي `s فيكون:

$$\upsilon`_B = \frac{\upsilon_B - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\upsilon_B} = \frac{0.7\ c - 0.9\ c}{1 - \frac{0.9\ c}{c^2}.0.7\ c}$$

$$\therefore\ \upsilon`_B = -0.54\ c$$

المثال (4):

جسم متحرك في محور الإسناد s باتجاه يصنع زاوية مقدارها 60° مع الاحداثي x وكانت طاقته الكلية 5GeV ومقدار زخمه 3GeV/c إذ أن c سرعة الضوء في الفراغ. مستخدماً معادلات تحويل الطاقة والزخم. جد طاقته الكلية وزخمه في محور الإسناد `s إذا علمت أن السرعة النسبية بين محوري الإسناد 0.8c

الحل:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \upsilon^2 / c^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.64\ )}} = \frac{5}{3}$$

وبتطبيق معادلات تحويل الطاقة من s إلى `s يكون:

$$\mathcal{E}` = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_X)$$

$$\therefore \mathcal{E}` = \frac{5}{3}\left[5 - (0.8\,c)\left(\frac{3}{c}\cos 60\right)\right]$$

$$\therefore \mathcal{E}` = \frac{5}{3}(5 - 1.2) = 6.33\,\text{GeV}$$

وهي طاقة الجسيم في محور الإسناد `s. ومن العلاقة (2 – 25) نجد أن:

$$\mathcal{E}'^2 - (cp')^2 = \mathcal{E}^2 - (cp)^2$$

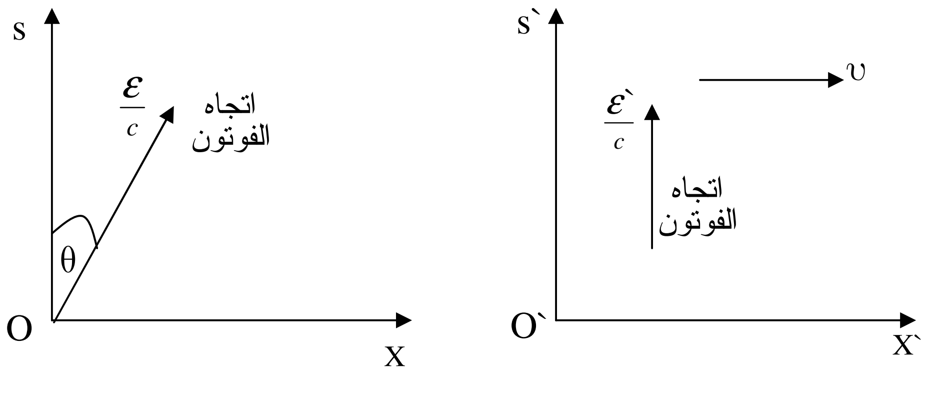
$$\therefore (6.33)^2 - (cp')^2 = (5)^2 - (3)^2$$

$$\therefore p' = 24.11 \text{GeV/c}$$

المثال: (5)

فوتون طاقته ε يتحرك في محور الإسناد s ويصنع خط مساره زاوية مقدارها θ مع الاحداثي y. مستخدماً معادلات تحويل الطاقة والزخم. جد طاقة الفوتون في محور الإسناد `s حيث يشاهد الفوتون يتحرك نحو الأعلى منطبقاً على الاحداثي y. ما هي السرعة النسبية بين محوري الإسناد؟ [لاحظ الشكل (2 – 11)].

الحل:



الشكل (2 – 11): الفوتون في s ينحرف بزاوية θ مع y وفي `s يتحرك باتجاه y.

الزخم يبقي دون تغيير باتجاه الاحداثي y أي أن:

$$p_y = p'_y$$

$$\therefore \frac{\mathcal{E}}{c}\cos\theta = \frac{\mathcal{E}'}{c}$$

$$\therefore \mathcal{E}' = \mathcal{E}\cos\theta$$

نطبق الآن معادلة تحويل الزخم باتجاه الاحداثي x من s إلي s` فيكون:

$$\therefore p`_x = \gamma\left(P_x - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right)$$

و بما أن الفوتون يتحرك باتجاه الاحداثي y في محور الإسناد s` فإن $p`_x = 0$

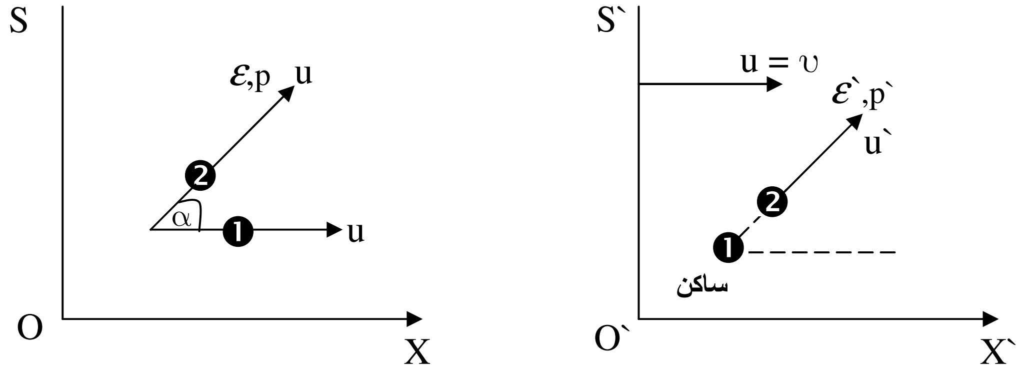
$$\therefore p_x = \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{c}\sin\theta = \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}$$

$$\therefore \upsilon = c\ \sin\theta$$

المثال (6):

انطلق جسيمان في آن واحد من نقطة مشتركة وبسرعة واحدة تساوي u وكان أحدهما يتحرك باتجاه الاحداثي x والآخر باتجاه يصنع زاوية α مع الاحداثي x حيث أن $\cos\alpha = \frac{u^2}{c^2}$. أثبت أن السرعة النسبية بينهما تساوي: $\frac{u\sqrt{(2 + u^2/c^2)}}{(1 + u^2/c^2)}$



الشكل (2 – 12): انطلاق الجسيمين بسرعة واحدة من نقطة مشتركة في s. أحد الجسيمين في s` في حالة سكون.

الحل:

نفرض أن الجسيمين انطلقا من محور الإسناد s كما موضح في الشكل (2 – 12). في محور الإسناد s` الذي يتحرك بسرعة u=υ باتجاه الاحداثي x نسبة لمحور

الإسناد s. نلاحظ أن الجسيم ❶ في حالة سكون وأن الجسيم ❷ يتحرك بسرعة `u بالاتجاه الموضح في الشكل. نفرض أن $\mathcal{E}$،p طاقة وزخم الجسيم ❷ في s وأن `ε ،`p طاقة وزخم الجسيم في `s.

$$\therefore \mathcal{E} = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

إذ أن m_0 الكتلة الساكنة للجسيم ❷ الذي يصنع اتجاهه الزاوية α مع الاحداثي x وأن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)}} \qquad , \quad \beta = \frac{u}{c}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}' &= \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x) \\
&= \gamma\left(\gamma m_0 c^2 - u^2 \gamma m_0 \cos\alpha\right) \\
&= \gamma^2 m_0 c_2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{E}'}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-u'^2/c^{2)}\right)}} = \gamma^2\left(1 - \frac{u^4}{c^4}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\left(1-u'^2/c^2\right)}} = \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)$$

ومن هذه العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$u' = \frac{u\sqrt{\left(2 + u^2/c^2\right)}}{\left(1 + u^2/c^2\right)}$$

حيث أن `u هي السرعة النسبية بين الجسيمين.

المثال (7):

إذا علمت أن فوتوناً طاقته 200 MeV يسير باتجاه الاحداثي x وآخر طاقته100MeV يسير باتجاه الاحداثي y فما الطاقة الكلية والزخم الكلي لهذا النظام؟ وإذا فرضت أن جسيماً منفرداً يمتلك هذه الطاقة الكلية وهذا الزخم الكلي فما هي كتلته الساكنة وبأي اتجاه يتحرك وما هي سرعته؟

الحل :

نفرض أن ε_1،ε_2 طاقة الفوتون باتجاه الاحداثي x وباتجـــاه الاحـــداثي y علـــى التوالي وان ε الطاقة الكلية للنظام و p الزخم الكلي للنظام.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 200 + 100 = 300\,\text{MeV}$$

$$p^2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{c}\right)^2 = \frac{(200)^2 + (100)^2}{c^2}$$

$$\therefore p = 224\,\text{MeV/c}$$

ومن العلاقة (2 – 30) نجد أن:

$$\left(M_0c^2\right)^2 = \varepsilon^2 - (cp)^2$$

حيث أن M_0 الكتلة الساكنة للجسيم الذي طاقته ε وزخمه p.

$$\therefore \left(M_0c^2\right)^2 = (300)^2 - (224)^2 = (200)^2$$

$$\therefore M_0 = 200\,\text{MeV/c}^2$$

نفرض الآن أن θ هي الزاوية التي يصنعها الزخم لهذا الجسيم مع الاحداثي x

$$\therefore \tan\theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{100}{200} = 0.5$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} 0.5 = 26.5^o$$

الآن:

$$M = \gamma M_0 \quad , \quad \varepsilon = Mc^2$$

$$\therefore \gamma = \frac{Mc^2}{M_0c^2} = \frac{300}{200} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)}}$$

$$\therefore \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

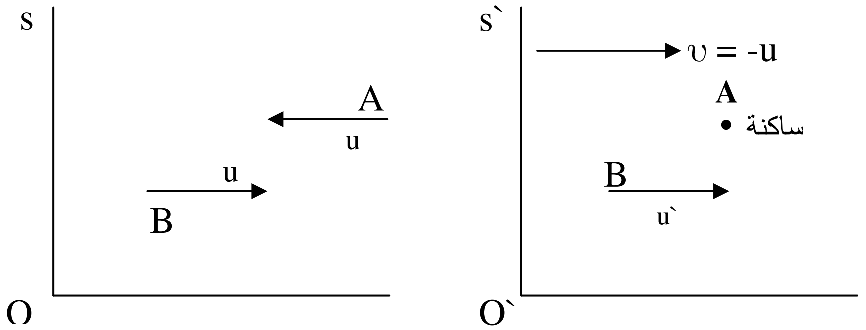
$$\therefore \upsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}c = 0.745\ c$$

المثال (8):

مركبتان فضائيتان A , B تسيران باتجاهين متعاكسين بسرعتين متســـاويتين وتقتربان من بعضهما وكان طول كل منهما m 100 كما هو مقاس من قبـــل

مشاهد داخل المركبة نفسها. تعدت إحداهما الأخرى وأشارت أجهزة القياس الدقيقة في المركبة A إلى أن الزمن اللازم لمقدمة المركبة B لتقطع كل الطول للمركبة A يساوي $5x10^{-6}s$ **أولاً:** ما هي السرعة النسبية بين المركبتين؟ **ثانياً:** سّجلت ساعة في مقدمة المركبة B الساعة الواحدة تماماً أثناء عبورها مقدمة المركبة A. ما الزمن الذي سجلته الساعة عند عبورها مؤخرة المركبة A.

الحل:



الشكل (2 – 13): المركبتان تسيران بسرعة واحدة باتجاهين متعاكسين في s. إحدى المركبتين في `s في حالة سكون.

__أولاً:__ نفرض أن سرعة كل من المركبتين في محور الإسناد s تساوي u كما موضح في الشكل (2 – 13). في محور الإسناد `s الذي يتحرك في اتجاه الاحداثي x بسرعة $\upsilon = -u$ نسبة لمحور الإسناد s نجد أن المركبة A ساكنة وأن B تتحرك بسرعة `u بالاتجاه الموضح في الشكل. هذه السرعة هي السرعة النسبية بين المركبتين وتساوي:

$$u' = \frac{100}{5\times10^{-6}} = 2\times10^{7}\ m\ s^{-1}$$

ثانياً: بما أن الساعة المثبتة في مقدمة المركبة B تتحرك بسرعة $u' = 2\times10^{7}\,ms^{-1}$ فإنها تسجل فترات زمنية أقصر بالنسبة لمشاهد في المركبة A. وباستخدام العلاقة (2 – 13) نجد أن:

$$t_A = \gamma t_B \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{1}{\gamma} t_A$$

$$\therefore t_B = \sqrt{(1-u'^2/c^2)}.(5\times10^{-6}) = \sqrt{\left(1-\frac{4\times10^{14}}{9\times10^{16}}\right)}\left(5\times10^{-6}\right) = 4.99\times10^{-6}\,s$$

إذن الساعة تسجل: الساعة الواحدة + $4.99x10^{-6}$ s

المثال (9):

جسيمان يتحركان باتجاهين متقابلين بسرعة $u_x=\pm0.9c$ في محور الإسناد s. ما هي سرعة أحد الجسيمين بالنسبة للأخر؟

الحل:

لحل هذه المسألة يجب أن نفرض أن في محور الإسناد s تكون سرعة احد الجسيمين $u_x=-0.9c$. عندها تصبح سرعة محور الإسناد `s بالنسبة إلى s تساوي $\upsilon$ =0.9c. لذلك فان الجسيم الذي سرعته $u_x=-0.9c$ في محور الإسناد s تكون سرعته في محور الإسناد `s مساوية إلى:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} = \frac{-1.80\,c}{1+(0.9)^2} = \frac{-1.80}{1.81}c = -0.994\,c$$

نلاحظ هنا أن السرعة النسبية بين الجسيمين اقل من سرعة الضوء c.

و الجدير بالذكر هنا، انه لو كان لدينا فوتون يتحرك بسرعة +c في محور الإسناد `s و يتحرك محور الإسناد `s بالنسبة إلى s بسرعة +c، عندها تكون سرعة الفوتون حسب مراقب في محور الإسناد s تساوي فقط +c و ليست +2c. إن وجود هذا القيد على حدية السرعة يعتبر نتاج قانون جمع السرعات في تحويلات لورنس. كما نلاحظ انه لا يوجد محور إسناد يكون فيه الفوتون ساكناً.

المثال (10):

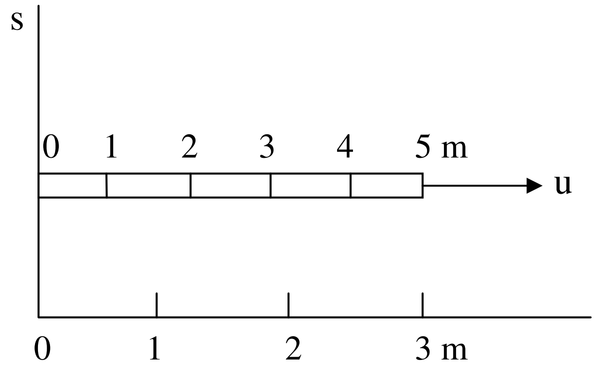
قضيب طوله الأصلي ℓ_0=5m و ينطبق طوله على الاحـــداثي x و يتحـــرك بسرعة u في محور الإسناد s في الاتجاه الموجب للاحـــداثي x. عنـــد أي سرعة u في محور الإسناد s يصبح طوله ℓ=3m. [انظر الشكل (2−15)]

الحل:

حسب قانون تقلص الطول:

$$\because \ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

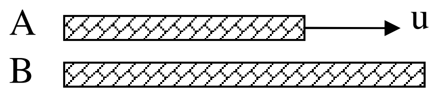
$$\therefore u = c\sqrt{1-(\ell/\ell_0)^2} = \frac{4}{5}c$$



الشكل (2−15): قضيب في حالة حركة باتجاه الاحداثي x.

المثال (11):

قضيب A يتحرك بسرعة u بجانب قضيب ساكن B في محـــور الإســـناد s [انظر الشكل (2−16)] ولكلا القضيبين نفس الطول الأصلي ℓ_0. أوجد الفترة الزمنية Δt بين لحظة تطابق نهايتي القضيبين في الجهتين اليُسرى واليُمنـــى في محور الإسناد s.



الشكل (2−16): قضيبان طولاهما الأصليان متساويان، أحدهما في حالة سكون و الآخر في حالة حركة.

الحل:

طول القضيب A المتحرك في محور الإسناد s يساوي:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1-(u/c)^2}$$

و من خلال الشكل أعلاه من السهل معرفة أن الفترة الزمنية المطلوبة تساوي:

$$\Delta t = (\ell_0 - \ell)/u = \left(1-\sqrt{1-(u/c)^2}\right)\ell_0/u$$

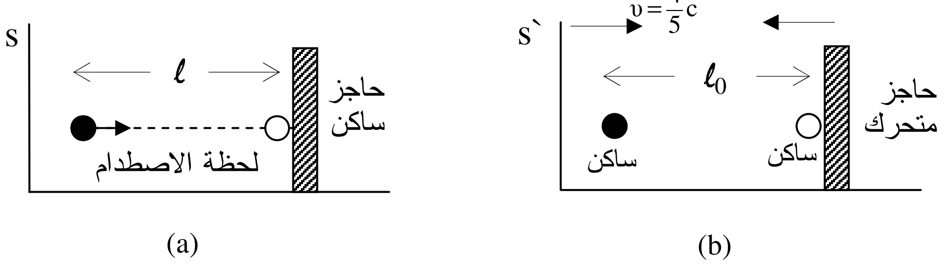
المثال (12):

جسيمان يتحركان في نفس الاتجاه و بنفس السرعة $u=\frac{4}{5}c$ في محور الإسناد s عندما تعرضا إلى حاجز ساكن بفارق زمني $\Delta t = 5x10^{-9}$ s. ما هي المسافة بين الجسيمين في محور الإسناد `s حيث يشاهد الجسيمان في حالة سكون؟

الحل:

نفرض أن المسافة بين الجسيمين في محور الإسناد s تساوي ℓ. و بما أن Δt هي الفترة الزمنية المقاسة من قبل مشاهد في هذا المحور [لاحظ الشكل (2-a17)]، لذلك فان:

$$\ell = u\Delta t$$



الشكل (2-17): جسيمان يتحركان باتجاه واحد نحو حاجز ساكن.

ننقل الحدث الآن إلى محور الإسناد `s الــذي يتحــرك بســرعة $\upsilon=\frac{4}{5}c$ باتجــاه الاحداثي x الموجب كما هو ملاحظ في الشكل (b17-2). يشاهد الجسيمان في هذا المحور أنهما في حالة سكون و أن المسافة بينهما تساوي ℓ_0. أما الحاجز فيتحــرك بسرعة تساوي $\frac{4}{5}c$ بالاتجاه السالب للاحداثي x. و فيما يتعلق بتقلص الطول مــن الممكن الاستعانة بالعلاقة:

$$\ell_0 = \gamma \ell = \frac{\ell}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

$$\therefore \ell_0 = \frac{u\Delta t}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} = \frac{4/5\, c \times 5\times 10^{-9}}{\sqrt{1-(4/5)^2}}$$

$$\therefore \ell_0 = \frac{4\, x\, 10^{-9}\ x\, 3\, x\, 10^{8}}{3/5} = 2\, m$$

تمارين الفصل الثاني

1- مشاهد A يبدأ بقياس مسطرتين إحداهما ساكنة والأخرى تتحرك بسرعة 0.995c فوجد أنهما بنفس الطول. مشاهد آخر B يتحرك مع المسطرة التي في حالة حركة. ما هي النسبة بين طول المسطرة المُقاسة من قبل المشاهد A إلي طول المسطرة المُقاسة من قبل المشاهد B؟

ج: (0.088)

2- ساق في محور الإسناد s طولها 2 m وهي في حالة حركة باتجاه الأحداثي x بسرعة 0.96c وتصنع زاوية مقدارها 30° مع x. أوجد أولاً: طولها في محور الإسناد s حيث تُشاهد الساق في حالة سكون، ثانياً: الزاوية التي تصنعها الساق مع الأحداثي `x في `s.

3- شوهد حدثان في محور الإسناد s الأول في النقطة (0,0,0) وفي زمن t=0 والثاني في النقطة (5c,0,0) وفي زمن t=4s. أحسب سرعة محور الإسناد `s حيث يُشاهد الحدثان في وقت واحد.

4- شوهد حدثان في آن واحد وفي زمن t = 0 في محور الإسناد s و كان موقع الحدث الأول في نقطة الأصل وموقع الحدث الثاني في النقطة (x,0,0). مشاهد آخر في محور الإسناد `s لاحظ أن الفترة الزمنية بين الحدثين تساوي t. استخدم تحويلات لورنس و استنتج أن المسافة بين الحدثين في محور الإسناد `s تساوي $\left(x^2+c^2t^2\right)^{1/2}$.

5- جسيمان متماثلان B,A الكتلة الساكنة لكل منهما M_0 يقتربان من بعضهما البعض في خط مستقيم واحد مشترك كل منهما يمتلك سرعة تساوي βc كما هي مُقاسة من قبل مشاهد في محور الإسناد s. جد الطاقة الكلية

للجسيم B كما هي مقاسة من قبل مشاهد في محور إسناد حيث يشاهد فيه الجسيم A في حالة سكون.

6- ساعتان قياسيتان a و b تتحركان بسرعتين ثابتتين مختلفتين باتجاه الأحداثي x انطبقتا على بعضهما بصورة لحظية عندما سجلت كل منهما وقتاً يساوي صفراً. وبعد فترة زمنية معينة فيما كانت الساعة a تسجل وقتاً يساوي T_a انبعثت منها نبضة ضوئية استُلمت من قبل b التي سجلت وقتاً يساوي T_b في لحظة استلامها للنبضة الضوئية. اثبت أن سرعة إحداهما نسبة إلى الأخرى تساوي: $c\left(T_b^2 - T_a^2\right)/\left(T_b^2 + T_a^2\right)$.

7- جسيمان الكتلة الساكنة لكل منهما $1.6x10^{-27}kg$ يسيران باتجاهين متعاكسين من نقطة مشتركة بسرعتين مقدار كل منهما 0.6c. **أولاً**: احسب طاقة وزخم أي منهما نسبة إلى النقطة المشتركة، **ثانياً**: مستخدماً تحويلات لورنس أحسب طاقة وزخم أي منهما نسبة إلى الآخر.

8- جسيم يتحرك في محور الإسناد s بطاقة كلية ε وطاقة حركية $\frac{1}{2}\varepsilon$. جد **أولاً**: الكتلة الساكنة لهذا الجسيم، **ثانياً**: زخمه ،**ثالثاً**: طاقته الكلية في محور الإسناد `s إذا كان زخمه يساوي $\varepsilon/2c$، **رابعاً**: وإذا كان الزخم p يصنع زاوية $30^o$ مع الأحداثي x فجد الزاوية التي يصنعها `p مع الأحداثي `x علماً بأن السرعة النسبية بين محوري الإسناد تساوي 0.8c.

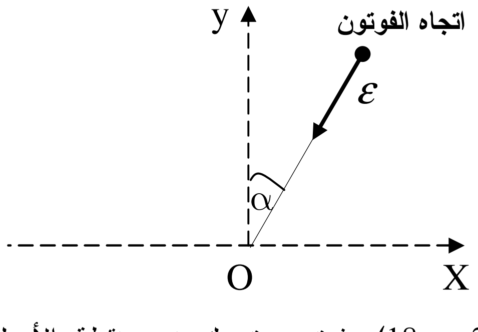
9- مركبة فضائية تتحرك بسرعة كبيرة نسبة للأرض أطلقت صاروخاً نحو الأرض بسرعة 0.84c نسبة للمركبة الفضائية. مراقب في قاعدة على الأرض قاس سرعة الصاروخ المقترب من الأرض فوجدها تساوي 0.36c. ما هي سرعة المركبة الفضائية نسبة للأرض وهل أن هذه المركبة تتحرك مبتعدة أم مقتربة من الأرض ؟

10–جسيمان في محور الإسناد s يسيران باتجاه الأحداثي x الموجب سرعة الأول $\frac{3}{5}c$ وسرعة الثاني $\frac{4}{5}c$. جد υ سرعة محور الإسناد `s نسبة لمحور الإسناد s حيث يشاهد الجسيمان يسيران بسرعتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه.

ج: $(\frac{5}{7}c)$

11–فوتون طاقته ε يسير باتجاه نقطة الأصل في محور الإسناد s ويعمل زاوية مقدارها α مع الأحداثي y وكما موضح في الشكل (2– 18). جد **أولاً:** طاقة الفوتون في محور الإسناد `s حيث يشاهد الفوتون يتحرك مستقيماً نحو الأسفل باتجاه الأحداثي y السالب، **ثانياً:** جد السرعة النسبية υ بين محوري الإسناد.

ج: $(c\sin\alpha \;,\; \varepsilon\cos\alpha)$



الشكل (2 – 18): فوتون يتحرك نحو نقطة الأصل وينحرف بزاوية α مع الاحداثي y.

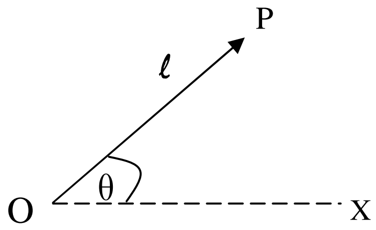
12–شوهد جسيم في محور إسناد معين أن له طاقة كلية تساوي 5GeV وزخماً يساوي 3GeV/c باتجاه يصنع زاوية مساوية إلي 30° مع الأحداثي x. **أولاً:** ما طاقته الكلية في محور إسناد آخر حيث يُشاهد الجسيم أن له زخماً مساوياً إلى 4GeV/c؟ ما اتجاه هذا الزخم؟ **ثانياً:** ما هي كتلته الساكنة مُقاسة

بوحدات الكتلة الذرية (amu)، علماً بأن $1amu=1.66x10^{-27}kg$ ؟ **ثالثاً**: ما هي السرعة النسبية بين محوري الإسناد؟

ج : (1) $4\sqrt{2}$ GeV ، 157.24^0

(2) 403 amu ، (3) $0.876c$

13-نبضة ضوئية انبعثت من النقطة o و امتصت عند النقطة p كما موضح في الشكل (2 – 19) في محور الإسناد s وكان طول المسار op يساوي ℓ ويصنع زاوية مقدارها θ مع الأحداثي x. في محور الإسناد `s جد **أولاً**: الفترة الزمنية `t، **ثانياً**: المسافة الفاصلة `ℓ بين لحظة انبعاث الضوء و لحظة امتصاصه.



الشكل (2 – 19): نبضة ضوئية صدرت من نقطة الأصل o بزاوية θ مع x وتم امتصاصها عند النقطة P.

الفصل الثالث

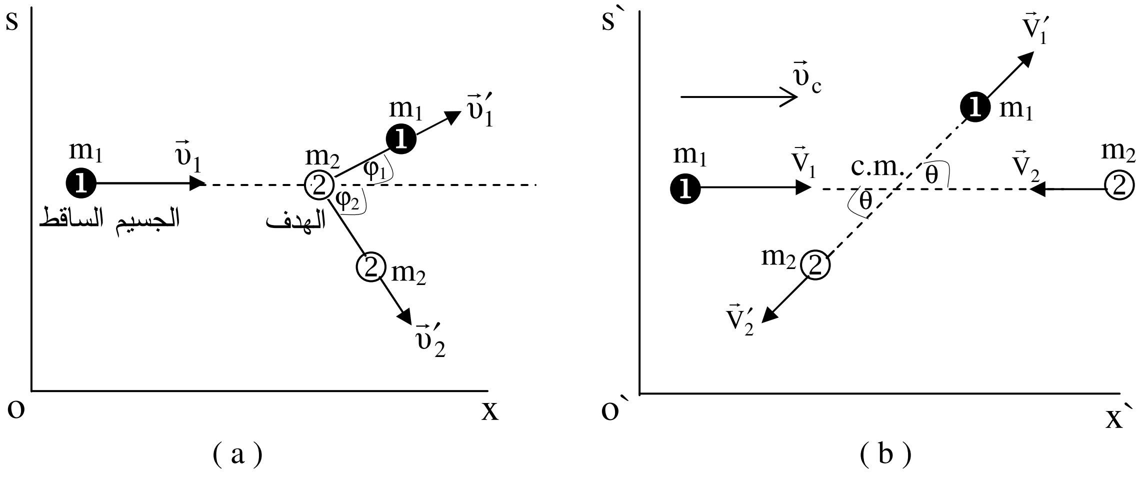
(نظرية التصادم)

1.3 المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة.
2.3 نظرية التصادم المرن.
3.3 نظرية التصادم غير المرن.
4.3 تأثير كومبتن.
5.3 امتصاص وانبعاث الفوتون.
أمثلة محلولة.
تمارين الفصل الثالث.

نظرية التصادم

3–1 المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة

تُستخدم المحاور المختبرية للقياسات التجريبية وتستخدم محاور مركز الكتلة لتسهيل الحسابات النظرية. محاور مركز الكتلة هي محاور تكون نقطة أصلها مثبتة في مركز كتلة جسمين في حالة تصادم وهي محاور الإسناد التي تحمل الفتحة (` ) ويرمز لها بالرمز `s. أما المحاور المختبرية فهي محاور إسناد يرمز لها عادة بالرمز s. ومن الممكن التحول من محاور مركز الكتلة إلي المحاور المختبرية أو بالعكس.



الشكل (3–1): (a) المحاور المختبرية، (b) محاور مركز الكتلة.

الشكل (3-1 a) يوضح تصادم جسمين الأول ❶ كتلته m_1 يتحـــرك بســـرعة $\vec{\upsilon}_1$ باتجاه الاحداثي x الموجب والآخر ② ساكن كتلته m_2. ويحدث هذا في المحـــاور المختبرية s في المستوى xy. ينحرف الجسم ❶ عن اتجاهه الأصلي بعد التصادم بزاوية φ_1 وينحرف الجسم ② بزاوية φ_2 كما موضح في الشكل.

بتطبيق قانون حفظ الزخم والطاقة بالنسبة للاتجـــاهين المتعامـــدين y,x نحصـــل على:

قانون حفظ الزخم بالنسبة للاحداثي x

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1'\cos\varphi_1 + m_2\upsilon_2'\cos\varphi_2 \qquad (1\text{-}3)$$

قانون حفظ الزخم بالنسبة للاحداثي y

$$o = m_1\upsilon_1'\sin\varphi_1 - m_2\upsilon_2'\sin\varphi_2 \qquad (2\text{-}3)$$

قانون حفظ الطاقة

$$\frac{p_1^2}{2\,m_1} = \frac{p_1'^2}{2\,m_1} + \frac{p_2'^2}{2\,m_2} + Q \qquad (3\text{-}3)$$

ويلاحظ هنا أن الكتل بقيت ثابتة دون تغيير قبل وبعد عمليـــة التصـــادم أي أننـــا اعتمدنا على قوانين الميكانيك التقليدي غير النسبي. وعلى هذا الأســـاس فالسُـــرع تكون واطئة مقارنة بسرعة الضوء أي أن سرعة الجسم $\upsilon << c$، ومن الممكـــن إذن تطبيق معادلات التحويل الخاصة بالسُرع لغاليليو، حيث أن $\vec{p}_1$ يمثـــل زخـــم الجسم ❶ قبل التصادم، p_1' زخم الجسم ❶ بعد التصادم و p_2' زخـــم الجســـم ② بعد التصادم و Q الفقدان في الطاقة نتيجة التصادم. وتجدر الملاحظة إلـــى أننـــا أخذنا الحالة العامة للتصادم ولم نشر إلى أن التصادم تام المرونة أو غيـــر مـــرن بالكامل. وسنتطرق إلى هذه الحالات في بنود لاحقة.

لنفرض الآن أن سرعتي الجسمين في محاور مركز الكتلة هما $\vec{v}_2, \vec{v}_1$ قبل التصادم وسرعتيهما بعد التصادم هما $\vec{v}'_2, \vec{v}'_1$ ومن تعريف السُرع النسبية علـــى اعتبار أن مركز الكتلة يبقى ساكنا في محاور مركز الكتلة `s يحصل أن:

$$\vec{v}_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c \qquad (4\text{-}3)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_c \qquad (5\text{-}3)$$

حيث أن $\vec{\upsilon}_c, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_1$ هي سُرع الجسمين ومركز الكتلة على التوالي في المحـــاور المختبرية. وبما أن الهدف يبقى ساكناً حسب افتراضنا فان:

$$\vec{\upsilon}_2 = 0$$

$$\therefore \vec{v}_2 = -\vec{\upsilon}_c$$

أي أن الهدف يتحرك نحو اليسار بسرعة مساوية في مقدارها لسرعة مركز الكتلة في المحاور المختبرية كما موضح في الشكل (3-b1).

ومن تعريف سرعة مركز الكتلة فأن:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}$$

وعند تعويض هذه القيمة في (3−4) و (3−5) ينتج:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2} \qquad (6\text{-}3)$$

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2} \qquad (7\text{-}3)$$

وبضرب طرفي المعادلة (3−6) بالكتلة m_1 وطرفي المعادلة (3−7) بالكتلة m_2 يحصل أن:

$$m_1 \vec{v}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{\upsilon}_1$$

$$m_2 \vec{v}_2 = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{\upsilon}_1$$

$$\therefore m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \qquad (8\text{-}3)$$

أي أن الزخم الكلي للمنظومة قبل التصادم يساوي صفراً. ومن قانون حفظ الزخم يكون الزخم الكلي للمنظومة بعد التصادم صفراً أيضا.

$$\therefore m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0 \qquad (9\text{-}3)$$

نستنتج مما تقدم أن الجسمين يقتربان من مركز الكتلة ثم يتصادمان ثم يبتعدان عنه باتجاهين متعاكسين حيث أن أحد الجسمين وهو m_1 (الجسم الساقط) ينحرف عن مساره الأصلي قبل التصادم. أما موازنة الطاقة فتعطينا المعادلة التالية:

$$\frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (10\text{-}3)$$

ولكن من المعادلتين (3–8) ، (3–9) لدينا:

$$\vec{P}'_1 = -\vec{P}'_2 \quad , \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

إذن:

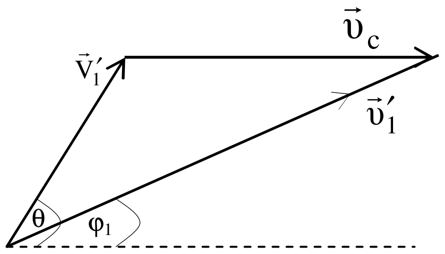
$$P_1'^2 = P_2'^2 \quad , \quad P_1^2 = P_2^2$$

وباستخدام هاتين العلاقتين يمكن حذف $\vec{P}'_2, \vec{P}_2$ في المعادلة (3–10) لتصبح:

$$\frac{P_1^2}{2\mu} = \frac{P_1'^2}{2\mu} + Q \qquad (11\text{-}3)$$

حيث أن $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ وتسمى الكتلة المختزلة.

من الممكن الآن رسم مثلث السُرع للجسم الساقط وكما موضح في الشكل (3–2) حيث نجد بعد عملية التصادم أن $\vec{V}'_1 = \vec{\upsilon}'_1 - \vec{\upsilon}_c$ ، لاحظ العلاقة (3–4) المشابهة لها للجسم الساقط قبل عملية التصادم.



الشكل(3−2): مثلث السُرع للجسم الساقط بعد عملية التصادم.

وبتحليل متجهات السرع $\vec{v}_1, \vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_c'$ باتجاهين متعامدين نحصل على:

$$\upsilon_1' \sin \varphi_1 = \vec{v}_1' \sin\theta$$

$$\upsilon_1' \cos \varphi_1 = \vec{v}_1' \cos\theta + \upsilon_c$$

ومن هاتين العلاقتين نحصل على:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\sin\theta}{\lambda_1 + \cos\theta} \qquad (12\text{-}3)$$

حيث أن: $\lambda_1 = \frac{\upsilon_c}{v_1'}$

وإذا اخدنا الجسم الثاني فان:

$$\tan \varphi_2 = \frac{\sin\theta}{\lambda_2 - \cos\theta} \qquad (13\text{-}3)$$

حيث أن: $\lambda_2 = \frac{\upsilon_c}{v_2'}$

ومن الجدير بالذكر أن عملية التصادم هذه درست على أساس أن جميع السرع واطئة مقارنة بسرعة الضوء وهكذا تبقى جميع الكتل ثابتة تقريباً خلال التصادم.

في حالة التصادم المرن التام يكون Q=0، لا يوجد فقدان في الطاقة

$$\therefore P_1 = P_1' \quad , \quad v_1 = v_1'$$

وهذا يعطى λ_1 القيمة الآتية:

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{m_2}$$

أما إذا كانت $m_2 >> m_1$ أي أن الهدف كبير مقارنة بالجسم الساقط فإن:

$$\lambda_1 \cong 0$$

ومن العلاقة (3-12) نجد أن:

$$\tan\varphi_1 = \tan\theta$$

$$\therefore \varphi_1 = \theta$$

أي تتساوى الزاويتان للجسم الساقط في المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة.

وإذا كانت: $m_1 = m_2$ فإن:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\therefore \tan\varphi_1 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2}$$

أي أن زاوية انحراف الجسم الساقط بعد التصادم في المحاور المختبرية تساوي نصف زاوية الأنحراف بعد التصادم في محاور مركز الكتلة.

وبالمثل فإن زاوية انحراف الهدف في محاور مركز الكتلة تساوي $(\pi-\theta)$.

وعلية تكون زاوية انحراف الهدف في المحاور المختبرية φ_2 مساوية إلى:

$$\varphi_2 = (\pi-\theta)/2$$

$$\therefore \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

أي أن الجسمين بعد عملية التصادم المرن التام يسيران باتجاهين متعامدين في المحاور المختبرية.

3-2 نظرية التصادم المرن:

من القياسات التي حصلنا عليها من تصادم كرتين مرنتين، [راجع البند (2-4)]، استطعنا أن نعطي تعريفاً جديداً لكتلة جسيم متحرك و وجدنا أنها تساوى $m_0/\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ حيث أن m_0 الكتلة الساكنة وأن u سرعة الجسيم. وهذا ساعد على اعطاء تعريف آخر للزخم والقوة واستخدامه لوضع نظرية مقنعة لحركة الجسيم المنفرد على ضوء النظرية النسبية.

سنجري الآن دراسة تفصيلية حول التصادم المرن بين جسيمين. يعرف التصادم المرن، بغض النظر عن طاقة الكتلة الساكنة، ان جميع الطاقات هي طاقات حركية، قبل وبعد التصادم. ويفترض في هذه الحالة أن الزخم الخطي والطاقة الحركية محفوظتان قبل و أثناء و بعد التصادم. فإذا فُرض أن الجسيمين لا تتغير خواصهما أثناء التصادم فإن الكتل الساكنة للجسيمين في حالة التصادم، تبقى بدون تغير قبل وبعد التصادم. فإذا كانت الطاقة الكلية $\mathcal{E} = T + m_0c^2$ محفوظة خلال التصادم، فإن مجموع الطاقتين الكليتين لهذين الجسيمين ستبقى محفوظة عند التصادم.

نفرض أن جسيماً حراً كتلته الساكنة هي m_{01} و زخمه $\vec{P}_1$، وطاقته الكلية $\mathcal{E}_1$ تصادم في نقطة معينة بجسيم آخر حر كتلته الساكنة m_{02} و زخمه $\vec{P}_2$ وطاقته الكلية $\mathcal{E}_2$ وحصل بعد التصادم أن الجسيمين بقيا حُرين و زخمهما $\vec{P}_3$ و $\vec{P}_4$ وطاقتيهما $\mathcal{E}_3$ و $\mathcal{E}_4$ على التوالي.

نفترض هنا أن كلاً من الزخم الخطي والطاقة محفوظ في محور الإسناد s حيث حدث التصادم.و بتطبيق قانون حفظ الزخم نحصل على العلاقة التالية في محور الإسناد s:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4 = \vec{P} \qquad (14\text{-}3)$$

حيث أن $\vec{P}$ مجموع الزخمين لهذين الجسيمين في محور الإسناد s. وبكتابة المعادلة (3–14) بدلالة مركبات الزخم نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} P_{1x} + P_{2x} &= P_{3x} + P_{4x} = P_x \\ P_{1y} + P_{2y} &= P_{3y} + P_{4y} = P_y \\ P_{1z} + P_{2z} &= P_{3z} + P_{4z} = P_z \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}3)$$

ومن قانون حفظ الطاقة نحصل على:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = \mathcal{E} \qquad (16\text{-}3)$$

حيث أن $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ يمثل كل منهما طاقة الجسيم قبل التصادم وأن كلاً من $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ يمثل طاقة الجسيم بعد التصادم. ومما تجدر ملاحظته أن $P_X, P_Y, P_Z, \mathcal{E}$ تبقى جميعها ثابتة في محور الإسناد s. بالنسبة للجسيم الحر نرى أن: $\mathcal{E} = mc^2$، لذا تكون العلاقة (3–16) مكافئة إلى:

$$m_1+m_2=m_3+m_4 \qquad (17\text{-}3)$$

حيث أن m_2, m_1 الكتل النسبية للجسيمين (1),(2) قبــل التصـــادم وأن m_4, m_3 كتلتاهما بعد التصادم على التوالي. هذه العلاقة الأخيرة تعتبر قانون حفــظ الكتلــة النسبية. وبما أن:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right)$$

يمكننا تحويل مركبة الزخم p_x من محور الإسناد s إلي s` وعلى الصورة التالية:

$$P'_x = P'_{1x}+P'_{2x} = \gamma\left(P_{1x}-\frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}_1\right)+\gamma\left(P_{2x}-\frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}_2\right)$$

$$\therefore P'_x = \gamma\left[P_{1x}+P_{2x}-\frac{\upsilon}{c^2}(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\right]$$

$$\therefore P'_x = \gamma\left(P_x - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right)$$

حيث أن $\vec{p}\,'$ متجه الزخم المساوي لمجموع زخمي الجسيمين في محور الإسناد s` قبل التصادم، أي أن: $\vec{p}\,' = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2$. وبالمثل يمكننا الاستعاضة عــن p'_{4x}, p'_{3x} بعد الاستعانة بتحويلات الزخم السابقة فيحصل:

$$P'_{3x}+P'_{4x} = \gamma\left[P_{3x}+P_{4x}-\frac{\upsilon}{c^2}(\mathcal{E}_3+\mathcal{E}_4)\right]$$

$$= \gamma\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right)$$

$$\therefore p'_{1x}+p'_{2x} = p'_{3x}+p'_{4x} = \gamma\left(p_x-\frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right) = p'_x \qquad (18\text{-}3)$$

وهكذا نلاحظ أن مركبة الزخم باتجاه الاحداثي x محفوظة في محور الإسناد s`.

وبما أن:

$$p'_y = p_y$$
$$p'_z = p_z$$

فان مركبة الزخم باتجاه y،z للجسيم تبقى دون تغيير في محور الإسناد s و s` أي يكون: $p'_{1y} = p_{1y}$ .... الخ

وهكذا نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} p'_{1y}+p'_{2y} &= p'_{3y}+p'_{4y} = p'_y = p_y \\ p'_{1z}+p'_{2z} &= p'_{3z}+p'_{4z} = p'_z = p_z \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}3)$$

وعليه نجد أن الزخم الكلي يبقي محفوظاً في محور الإسناد `s وباستخدام العلاقة: $\mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x)$ وهي تحويل الطاقة الكلية لجسيم منفرد من s إلى `s، يمكننا كتابة العلاقات التالية:

$$\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = \gamma(\mathcal{E}_1 - \upsilon p_{1x}) + \gamma(\mathcal{E}_2 - \upsilon p_{2x})$$
$$= \gamma[(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) - \upsilon(p_{1x} + p_{2x})]$$
$$\therefore \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x) \qquad (20\text{-}3)$$

حيث يمثل `$\mathcal{E}$ مجموع الطاقتين الكليتين للجسيمين كما هي ملاحظة في محور الإسناد `s قبل التصادم. وبالمثل نجد أن:

$$\mathcal{E}'_3 + \mathcal{E}'_4 = \gamma[(\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4) - \upsilon(p_{3x} + p_{4x})]$$
$$\therefore \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x)$$

وعليه نحصل على:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}'_3 + \mathcal{E}'_4 = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x) \qquad (21\text{-}3)$$

وهكذا نرى أن الطاقة الكلية محفوظة في `s إذا بقيت الطاقة الكلية والزخم محفوظان في s. وبما أن:

$\mathcal{E}'_1 = m'_1 c^2$ ... الخ

تكتب العلاقة الأخيرة كالتالي:

$$m'_1 + m'_2 = m'_3 + m'_4 \qquad (22\text{-}3)$$

حيث أن m'_4, m'_3, m'_2, m'_1 هي الكتل النسبية للجسيمين في `s قبل وبعد التصادم على التوالي و تمثل المعادلة (3–22) قانون حفظ الكتلة.

نستنتج مما تقدم أن مجموع الزخم ومجموع الطاقة الكلية للجسيمين في حالة تصادم تتحول من s إلى `s بنفس الطريقة التي فيها يتحول الزخم والطاقة الكلية لجسيم منفرد. إن قوانين حفظ الزخم والطاقة (أو الكتلة) وضعت بطريقة بحيث تتفق مع النظرية النسبية الخاصة وإن كانت هذه القوانين تحقق النتائج العملية لكن تبقى بعض الأسئلة عالقة ينبغي الإجابة عليها من الناحية التجريبية.

سنتناول الآن مسألة مهمة سندرسها بشيء من التفصيل يكون فيها كل من الزخم والطاقة محفوظاً وسنحصل على بعض النتائج النظرية التي يمكن مقارنتها بالنتائج التجريبية. سنأخذ بنظر الاعتبار التأثيرات النسبية المتعلقة بالسُرع العالية إذا ما حصلت عملية تصادم بين جسيمين أو أكثر.

نفرض الكتلة الساكنة لجسيم ما m_0 وهو يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب بسرعة $\vec{u}_1$ وزخم $\vec{P}_1$ وطاقة كلية $\mathcal{E}_1$ اصطدم بجسيم آخر كتلته الساكنة m_0، ساكن في المحاور المختبرية s كما هو ملاحظ في الشكل (3-3)، زخمه $\vec{P}_2 = 0$ وطاقته الكلية $\mathcal{E}_2 = m_0c^2$. يعتبر هذا التصادم كذلك في محور الإسناد `s بحيث يكون الزخم الكلي $\vec{P}'$ للجسيمين صفراً. يتحرك هذا المحور بسرعة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الاحداثي x نسبة لمحور الإسناد s. (يطلق على محور الإسناد `s، كما مر بنا سابقاً، محاور مركز الكتلة).

في محور الإسناد s قبل التصادم نجد:

1) الزخم الكلى $\vec{P}$ يساوي:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 = \frac{m_0\vec{u}_1}{\sqrt{(1-u_1^2/c^2)}} = \vec{p}_x \qquad (23\text{-}2)$$

2) الطاقة الكلية $\mathcal{E}$ تساوي:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-u_1^2/c^2)}} + m_0c^2$$

$$\therefore \mathcal{E} = \left[1 + \frac{1}{\sqrt{(1-u_1^2/c^2)}}\right] m_0c^2 \qquad (24\text{-}2)$$

وفي محور الإسناد `s قبل التصادم نجد:

1) الزخم الكلي $\vec{P}'$ يساوي:

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0 \qquad (25\text{-}3)$$

وبما أن الزخم الكلي يساوي صفراً فهذا يعني أن مركباته باتجاه المحور x ، y، z تساوي صفراً أيضا،أي أن:

$$p'_x = p'_y = p'_z = 0$$

2) باستخدام معادلات تحويل الزخم من المحور s إلى `s نحصل على:

$$p'_y = p_y = 0$$

$$p'_z = p_z = 0$$

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right) = 0$$

$$\therefore\ \upsilon = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}} \qquad (26\text{-}3)$$

حيث أن $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ الطاقة الكلية للنظام. العلاقة (3-26) تعطي سرعة محور الإسناد `s نسبة لمحور الإسناد s حيث يكون الزخم الكلي في محاور مركز الكتلة مساوياً صفراً.

3) الطاقة الكلية $\mathcal{E}'$ تساوي:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

$$\therefore \mathcal{E}' = c\sqrt{\left(p_1'^2 + m_0^2c^2\right)} + c\sqrt{\left(p_2'^2 + m_0^2c^2\right)} \qquad (27\text{-}3)$$

وبما أن:

$$\vec{p}\,'_1 = -\vec{p}\,'_2$$

$$\therefore\ \vec{p}\,'^2_1 = \vec{p}\,'^2_2$$

وبما أن الكتلة الساكنة للجسيمين في حالة تصادم تكون متساوية، ينتج من العلاقة (3-27) أن:

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2$$

$$\therefore \mathcal{E}' = 2\mathcal{E}'_1 = 2\mathcal{E}'_2$$

4) بما أن الجسيم الثاني في محور الإسناد s قبل التصادم كان ساكناً، لاحظ الشكل (a3-3)، أي أن $\vec{u}_2 = 0$ فهذا يعني أن سرعة $\vec{u}'_2$ في محور الإسناد `s قبل التصادم تساوي: $\vec{u}'_2 = -\vec{\upsilon}$

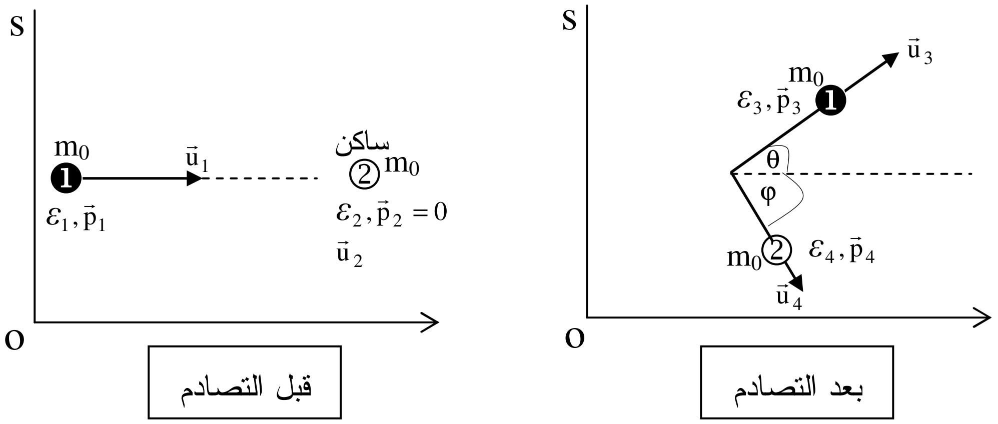
$$\therefore \mathcal{E}' = 2\mathcal{E}'_1 = 2\mathcal{E}'_2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{\left(1 - u_2'^2/c^2\right)}} = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)}} \qquad (28\text{-}3)$$

$$\therefore\ \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} = \gamma m_0 c^2 \qquad (29\text{-}3)$$

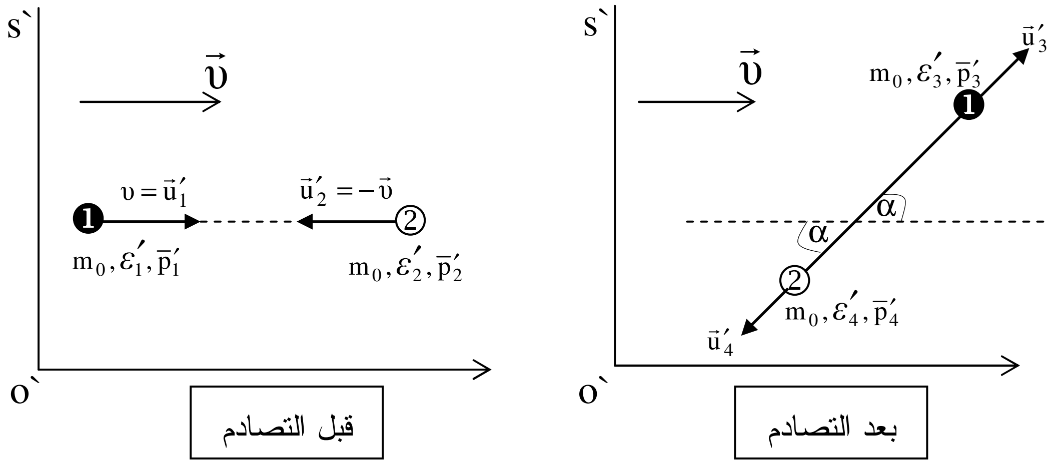
5) بما أن ε_1' تعطى من العلاقة (3-28) ينتج أن:

$$u_1' = -u_2' = \upsilon$$

وهكذا نستنتج أن الجسيمين في محور الإسناد `s قبل التصادم يقتربان من بعضهما البعض بسرعتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه، كما هو ملاحظ في الشكل (3-3 b).



(a) المحاور المختبرية



(b) محاور مركز الكتلة

الشكل(3-3): (a)المحاور المختبرية (محور الإسناد s) قبل وبعد التصادم المرن التام. (b) محاور مركز الكتلة (محور الإسناد `s) قبل وبعد التصادم المرن التام.

في محور الإسناد `s بعد التصادم نجد:

1) أن الزخم الكلي $\vec{p}'$ يبقى محفوظاً ويساوي صفراً بعـــد التصـــادم أي أن:

$$\vec{p}' = \vec{p}'_3 + \vec{p}'_4 = 0$$

$$\therefore \ \vec{p}'_3 = -\vec{p}'_4 \quad , \quad p'^2_3 = p'^2_4$$

أي أن الجسيمين يرتد كل منهما بسرعة υ وقد يرتدان باتجاهين مختلفين مقارنـــة باتجاههما قبل التصادم.

2) أن الطاقة الكلية `ε تبقى محفوظة لآن التصادم تام المرونة فيكون:

$$\varepsilon' = \varepsilon'_3 = \varepsilon'_4 = \frac{2\,m_0 c^2}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}} \qquad (30\text{-}3)$$

وبما أن $p'^2_3 = p'^2_4$ و أن الكتلة الساكنة لكل من الجسيمين متســاوية يحصـــل بالمثل أن:

$$\therefore \varepsilon' = 2\varepsilon'_3 = 2\varepsilon'_4 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}}$$

$$\therefore \ \varepsilon'_3 = \varepsilon'_4 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}} \qquad (31\text{-}3)$$

ومن هذا نستنتج كما في السابق أن:

$$u'_3 = -u'_4 = \vec{\upsilon}$$

وهكذا نرى أن الجسيمين في محور الإسناد `s بعد التصادم يبتعـــدان عـــن بعضهما بزخمين متساويين في المقدار ومتعاكسين بالاتجاه كما موضح في الشكل (b 3-3).

3) نفرض أن الجسيم الأول تشتت باتجاه يصنع مع الاحـــداثي x زاويـــة مقدارها α بعد التصادم كما هو ملاحظ في الشكل.

إذن تكون مركبات الجسيم الأول الخاصة بسرعته مساوية إلي:

$$u'_{3x} = \upsilon \cos \alpha$$

$$u'_{3y} = \upsilon \sin \alpha$$

$$u'_{3z} = 0$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أننا فرضنا أن عملية التصادم تحصل في المستوي `x`-y
في محور الإسناد `s.

4) وبالنسبة للجسيم الثاني تكون مركبات سرعته مساوية إلى:

$$u'_{4x} = -\upsilon\cos\alpha$$

$$u'_{4y} = -\upsilon\sin\alpha$$

$$u'_{4z} = 0$$

5) وبإجراء عملية تحويل السُرع للجسيم الأول من محور الإسناد `s إلـــى محور الإسناد s بعد التصادم يحصل:

$$u_{3x} = \frac{u'_{3x} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_{3x}} = \frac{\upsilon\cos\alpha + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos\alpha}$$

$$u_{3y} = \frac{u'_{3y}/\gamma}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_{3x}} = \frac{\upsilon\sin\alpha}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos\alpha\right)}$$

$$u_{3z} = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{u_{3y}}{u_{3x}} = \frac{\sin\alpha}{\gamma(1+\cos\alpha)} \qquad (32\text{-}3)$$

6) نجري مرة أخرى عملية تحويل السُرع للجسيم الثـــاني مـــن s إلـى `s فيكون:

$$u_{4x} = \frac{-\upsilon\cos\alpha + \upsilon}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos\alpha}$$

$$u_{4y} = \frac{-\upsilon\sin\alpha}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos\alpha\right)}$$

$$u_{4z} = 0$$

$$\therefore \tan\varphi = \frac{-u_{4y}}{u_{4x}} = \frac{\sin\alpha}{\gamma(1-\cos\alpha)} \qquad (33\text{-}3)$$

وبضرب المعادلتين (3−32) و (3−33) ببعضهما ينتج:

$$\tan\theta \quad \tan\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{\gamma^2\left(1-\cos^2\alpha\right)} = \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \upsilon^2/c^2$$

ولكن من المعادلة (3−26) نرى أن:

$$\upsilon = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}} = \frac{m_0 u_1 c^2}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{1}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}}\right] m_0 c^2}$$

$$\therefore \ \upsilon = \frac{u_1}{1+\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}} \qquad (34\text{-}3)$$

$$\therefore 1-\upsilon^2/c^2 = 1 - \frac{u_1^2/c^2}{\left[1+\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}\right]^2} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}}}$$

$$\therefore \tan\theta \tan\varphi = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}}} \le 1 \qquad (35\text{-}3)$$

و إذا كانت $u_1 \ll c$ أي أن الجسيم الساقط تكون سرعته واطئة مقارنـــة بســـرعة الضوء كما هي الحالة في الميكانيك التقليدي غير النسبي فان:

$$\tan\theta \tan\varphi = 1 \qquad (36\text{-}3)$$

وبما أن:

$$\tan\left(\theta+\varphi\right) = \frac{\tan\theta\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi} \cong \infty$$

$$\therefore \ \theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

أي في حالة السُرع الواطئة يتشتت الجسيمان باتجاهين متعامدين في المحاور المختبرية s بعد التصادم. أما إذا كانت السُرع عالية و قريبة من سرعة الضوء فإن:

$$\tan\theta \tan\varphi = \frac{2}{1+\gamma_1}$$

أو:

$$2\cot\theta \cot\varphi = 1+\gamma_1 \qquad (37\text{-}3)$$

حيث أن:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}}$$

لقد ثبت عملياً أن زاوية التشتت بين جسيمات ألفا المنبعثة من مصدر البولونيوم في غرفة التأين المملوءة بغاز الهليوم، حيث أن $u_1 \ll c$ تساوي $\pi/2$ بعد التصادم. أما إذا كانت u_1 ذات قيمة عالية فتكون الزاوية $\theta+\varphi$ أقل من $\pi/2$. ولقد وجد أن الإلكترونات التي تتراوح سرعتها بين 0.82c و 0.94c في غرفة التأين المملوءة بغاز الأوكسجين أو النيتروجين تتشتت بعد التصادم بزاوية أقل من $\pi/2$ بمقدار 10° أو أكثر. إن هذه النتائج لا يمكن تفسيرها على أنها تصادم مرن مرتبط بقوانين الميكانيك الاعتيادي لنيوتن، فالقيم الملاحظة للزاوية $\theta+\varphi$ تشير إلى أن هناك ترابطاً وثيقاً بين التصادم المرن وقوانين النظرية النسبية الخاصة فقد جاءت النتائج متفقة تماماً مع هذه النظرية.

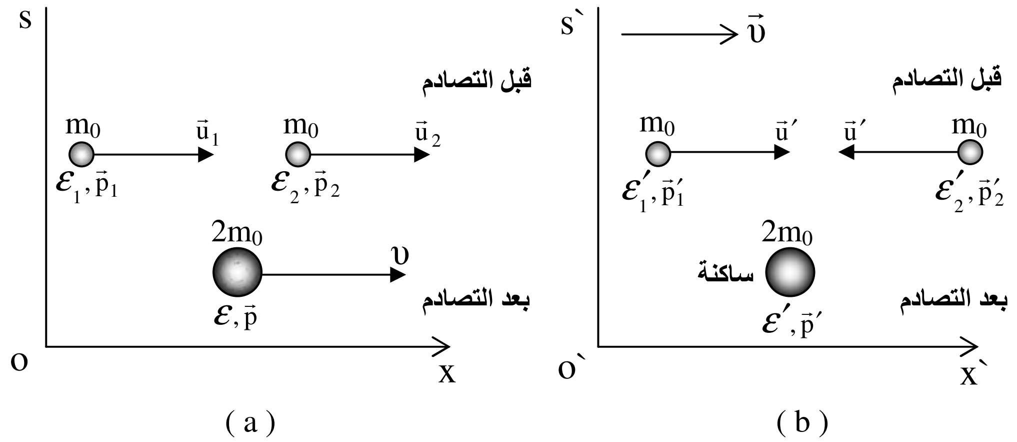
من الممكن أن نناقش أيضاً التشتت المرن الذي يحصل بين جسيمين كتلتاهما الساكنتان غير متساويتين في محاور مركز الكتلة بطريقة مشابهة لتلك التي استخدمت في حالة التصادم المرن بين جسيمين متشابهين كتلتاهما الساكنتان متساويتان. الزخم الكلي للجسيمين قبل التصادم في محاور مركز الكتلة يساوي أيضاً صفراً وبما أن الكتلتين الساكنتين لهما غير متساويتين فانهما يقتربان من بعضهما بسرعتين غير متساويتين في محاور مركز الكتلة. وإذا كان التصادم مرناً يرتد الجسيمان بحيث يكون الزخم الكلي لهما يساوي صفراً بعد التصادم.

وينبغي أن نشير إلى أن هناك طرقاً أخرى تتم فيها دراسة تصادم جسيمين غير متساويين بالكتلة الساكنة والطرق هذه لا تستخدم فيها المحاور المختبرية

ومحاور مركز الكتلة. ومهما تغيرت الطرق لابد من تطبيق قوانين حفظ الطاقة والزخم حيث تبقى الطاقة الكلية والزخم الكلى محفوظين خلال عمليات التصادم.

3-3 نظرية التصادم غير المرن.

أوضحنا في البند السابق أنه في التصادم المرن تكون كل الطاقة حركية قبل وبعد التصادم، هذا إذا لم يؤخذ بالاعتبار طاقة الكتلة الساكنة. ومن المعروف في الميكانيك الاعتيادي لنيوتن أن الطاقة الحركية لا تبقى دائما محفوظة خلال التصادم، فأحياناً يحصل أن قسماً من هذه الطاقة يتحول إلى حرارة أو صوت وفي أحيان أخرى قد تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة. يكون قانون حفظ الزخم قائماً يمكن تطبيقه ضمن قوانين الميكانيك الاعتيادي لنيوتن ويمكن كذلك تطبيق قانون حفظ الطاقة إذا أخذت جميع صور الطاقة بنظر الاعتبار. ويمكن الآن تطبيق قوانين حفظ الطاقة والزخم بصورة عامة في حالات التصادم التي تحدث بين الجسيمات عالية الطاقة حيث لا تكون الطاقة الحركية بالضرورة محفوظة. ولنأخذ الآن مثالاً يتعلق بالتصادم غير المرن بالكامل حيث تكون الطاقة الحركية في محور الإسناد `s مساوية صفراً بعد التصادم.



الشكل (3-4): (a)عملية التصادم غير المرن بين جسيمين في s.

(b) عملية التصادم غير المرن بين جسيمين في `s.

لنعتبر كرتين الكتلة الساكنة لكل منهما m_0 تتحـــرك إحـــداهما بســـرعة $\vec{u}'$ والأخرى $-\vec{u}'$ باتجاه الأحداثي x الموجب في محور الإسناد `s ولنفرض حدوث تصادم غير مرن بالكامل بين هاتين الكرتين كما هو موضح في الشـــكل (b4-3). ولنعتبر أن الكرتين التصقتا مع بعضهما وكونتا كرة (كتلة) مشتركة بعد التصـــادم. وبما أن الزخم الكلى قبل التصادم يساوي صفراً في حالة بقـــاء الـــزخم محفوظـــاً يحصل أن سرعة الكرة المشتركة بعد التصادم تساوي صفراً في محور الإسناد `s.
أما الطاقة الكلية للكرتين قبل التصادم في `s فهي تساوي:

$$\mathcal{E}' = 2m'c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{(1-u'^2/c^2)}} = 2m_0c^2 + T' \qquad (38\text{-}3)$$

حيث أن `T مجموع الطاقتين الحركيتين للجسيمين قبـــل التصـــادم فـــي محـــور الإسناد `s.

إذا فرض الآن أن كل الطاقة الحركية في `s تتحول إلـــي حـــرارة، تكـــون الحرارة المتولدة في هذا التصادم كما هي مقاسة في `s مساوية إلى:

$$Q' = T' = \mathcal{E}' - 2m_0c^2 \qquad (39\text{-}3)$$

لنعتبر الآن نفس هذا التصادم في محور الإسناد s حيـــث يتحـــرك بســـرعة منتظمة $-\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للاحداثي x نسبة لمحور الإسناد `s كما هو ملاحظ في الشكل (a 4-3). فالزخم الكلي للكرتين في s يمكن حسابه من معرفـــة الـــزخم الكلي والطاقة للكرتين في `s مباشرة قبل التصادم حيث تستعمل معادلات التحويل الخاصة بالزخم والطاقة بين محوري الإسناد، أي من `s إلى s فيكون:

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'\right)$$

وبما أن الزخم الكلي يساوي صفرا في `s يحصل أن:

$$p'_x = p'_y = p'_z = 0$$

$$\therefore p_x = \gamma\frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}' \qquad (40\text{-}3)$$

وبالاستعاضة عن قيمة `$\mathcal{E}$ المعطاة في المعادلة (3–39) يكون في حالة `Q`=T أن:

$$p_x = \gamma\upsilon(2m_0 + T'/c^2) = \gamma\upsilon(2m_0 + Q'/c^2) \qquad (41\text{-}3)$$

وبالمثل نكتب:

$$p_y = p'_y = 0$$
$$p_z = p'_z = 0$$

وبالمثل أيضاً نجد أن الطاقة الكلية في s قبل التصادم يمكن حسابها باستخدام معادلات التحويل التالية:

$$\mathcal{E} = \gamma\left(\mathcal{E}' + \upsilon p`_x\right) = \gamma\left(\mathcal{E}' + 0\right) = \gamma\,\mathcal{E}'$$

وبالاستعاضة عن $\mathcal{E}`$ في المعادلة (3−38) نحصل على الطاقة الكلية في s قبل التصادم وتساوي:

$$\mathcal{E}' = \gamma\left(2\,m_0c^2 + T'\right) \qquad (42\text{-}3)$$

يلاحظ بعد التصادم أن الكتلة المشتركة التي هي ساكنة في `s تتحرك بسرعة υ في s. فإذا لم يحصل أي فناء للمادة خلال عملية التصادم نتوقع أن تكون الكتلة الساكنة للكرة المشتركة مساوية إلى $2m_0$ ويصبح الزخم الكلي الخطي في s بعد التصادم مساوياً إلى:

$$\vec{p}_x = \frac{2\,m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} = 2\,\gamma m_0\vec{\upsilon} \qquad (43\text{-}3)$$

وبمقارنة هذه العلاقة الأخيرة مع العلاقة (3−41) نجد أنه لو كانت الكتلة الساكنة هي $2m_0$ لا يبقى الزخم محفوظاً خلال التصادم. ولكي يبقى الزخم محفوظاً في محور الإسناد s ينبغي أن نستبدل الكتلة $2m_0$ في العلاقة (3−43) بكتلة أخرى هي M_0 حيث أن:

$$M_0 = 2m_0 + Q'/c^2 \qquad (44\text{-}3)$$

وعليه فأن الزخم الخطي المساوي إلى $\left(\gamma\upsilon\, Q'/c^2\right)$ قد ظهر نتيجة الحرارة التي تولدت خلال التصادم بفرض أن الزخم يبقى محفوظاً في s. إن هذه الحرارة تتحرك مع الكتلة المشتركة بسرعة υ في s ويكون زخمها مكافئا إلى زخم الكتلة النسبية المساوية إلى $\left(\gamma Q'/c^2\right)$ في محور الإسناد s والكتلة النسبية المساوية إلى Q'/c^2 في محور الإسناد `s. وهكذا تكون الطاقة الكلية للكتلة المشتركة في s بعد التصادم مساوية إلى $\gamma M_0c^2$ وترتبط مع `Q بالعلاقة التالية:

$$\mathcal{E} = \gamma M_0 c^2 = \gamma\left(2 m_0 c^2 + Q'\right) \qquad (45\text{-}3)$$

وإذا قورنت المعادلتان (3−42)،(3−45) نجد أن الطاقة الكلية تبقي محفوظة وذلك لأن $T' = Q'$ في محور الإسناد `s.

نلاحظ مما تقدم أنه إذا كان الزخم محفوظاً في أي تصادم ينبغي على ضوء النظرية النسبية الخاصة أن يتم ارتباط كل من الكتلة القصرية* والزخم بجميع صور الطاقة بحيث لو فُرض حصول أي تغيير في الطاقة مثل $\Delta\mathcal{E}$، لرافقه تغير في الكتلة Δm حيث أن:

$$\Delta m = \Delta\mathcal{E}/c^2$$

وإن صحت هذه العلاقة لجميع صور الطاقة فانه عندما يحصل أي تغير في الطاقة لأي نظام، تتغير الكتلة القصرية لذلك النظام أو بالعكس. من الممكن جعل هذه القاعدة عامة بحيث تطبق على الكتل الساكنة للجسيمات بعد أن يؤخذ بالاعتبار التكافؤ بين الكتلة والطاقة في جميع الحالات. وإن كان هذا التكافؤ الوارد (أي بين الكتلة والطاقة) صحيحاً من الناحية العلمية، فأنه يجب إثباته تجريبياً.

أول تجربة أجريت لإثبات العلاقة $\Delta\mathcal{E}=\Delta mc^2$ كانت في سنة 1932. حيث عُجلت بروتونات حتى أصبحت طاقتها 0.25MeV بعدها تم توجيه هذه البروتونات المعجلة لقصف مادة الليثيوم كهدف فانبعث جسيما ألفا باتجاهين متعاكسين. طاقة الجسيم الواحد 8.6MeV إذن الطاقة المكتسبة في هذا التفاعل تساوي:

$$2x8.6-0.25=16.95 \text{ MeV}$$

حيث أن 0.25MeV هي الطاقة الحركية للبروتون الساقط. وكان نوع التفاعل هو:

$${}^1_1P + {}^7_3Li \rightarrow 2\alpha$$

وباستخدام قيم الكتل الذرية يمكننا حساب الكمية Δm:

---

* الكتلة القصرية (القصورية) هي نسبة الزخم الخطي إلى السرعة و يقصد بها أيضا الكتلة النسبية وهي تتغير مع السرعة حسب العلاقة $m=\frac{m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$ ، حيث أن m_0 كتلة السكون.

(مجموع الكتل الناتجة عن التفاعل)-(مجموع الكتل الداخلة في التفاعل)=Δm

$$^{1}_{1}P + ^{7}_{3}Li - 2\alpha = 0.0154 \pm 0.003\, a.m.u.$$

إن هذا الاختلاف في الكتلة يكافئ فرقاً في الطاقة يساوي 14.3±2.7 MeV فإذا كانت العلاقة $\Delta\mathcal{E} = \Delta mc^2$ صحيحة. فإن هذه النتيجة تتفق تماماً مع الزيادة الحاصلة في الطاقة الحركية المساوية إلى 16.95 MeV.

بالنسبة للطاقة التي تصل إلى الأرض من الشمس، من الممكن تقدير الطاقة الكلية المنبعثة من الشمس كما يلي:

إن كمية الطاقة المنبعثة من الشمس في الثانية تساوي: $4\times10^{26}\ Js^{-1}$ وعليه يكون:

$$\Delta m = \frac{\Delta\mathcal{E}}{c^2} = \frac{4\times10^{26}}{9\times10^{16}} = 4.4\times10^{9}\ kg$$

$$\cong 4,4\times10^{6}\ tons$$

أي أن كتلة الشمس تتناقص بمعدل أربعة ملايين طن في كل ثانية. وهذه الكتلة صغيرة جداً مقارنة بكتلة الشمس التي تقدر بحوالي:

2.1×10^{27} tons

أو

1.98×10^{30} kg

3-4 تأثير كومبتن.

سبق أن بينا في الفصل الأول أن الضوء يمتلك خواص ازدواجية فهو أحياناً يعتبر حركة موجية تنقل طاقة تحدد بمتجه بوينتك $\vec{N}$ ويعرف بأنه معدل الطاقة التي تمر خلال وحدة السطوح بصورة عمودية في الثانية ويكتب بالصيغة $\vec{N} = \vec{E}\times\vec{H}$ حيث أن $\vec{E}$ متجه المجال الكهربائي و $\vec{H}$ متجه المجال المغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية. فالضوء إذن هو تذبذب مجال كهربائي ومغناطيسي ينتقل في الفراغ المطلق بسرعة كبيرة هي سرعة الضوء. و من ناحية أخرى يعتبر الضوء إشعاعاً ينقل طاقة بشكل كمات وان أقل طاقة يمكن أن تنقل في الحزمة الضوئية هي طاقة الفوتون المنفرد وتساوي $\mathcal{E} = h\nu$، حيث أن h–ثابت بلانك و ν–تردد الإشعاع. إذن الضوء سيل من الفوتونات التي إذا سقطت على

سطح تولد ضغطاً عليه يسمى بضغط الإشعاع. لقد استخدمت فكرة الفوتون هـذه لتفسير كل الظواهر الفيزيائية المتعلقة بتفاعل الإشعاع مع المادة مثل إشعاع الجسم الأسود والظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتن. فإذا سقط ضوء تـردده ν علـى سطح مادة معينة ستنبعث من السطح الكترونات منفردة عندما يحصل امتصـاص لهذه الفوتونات وبموجب تفسير آينشتاين فان الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة تساوي $h\nu - \varphi$ إذ أن φ دالة الشغل للمعدن. و بشكل عام يسلك الضـوء سـلوك الموجات أثناء انتشاره، و يسلك سلوك الأجسام عند تفاعله مع المادة

إن فكرة وجود فوتونات منفصلة تسير بسرعة الضوء أصبحت الآن حقيقـة تجريبية مقبولة. فلجسيم كتلته الساكنة m_0 يكون:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \quad , \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \quad , \quad \mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}}$$

وبينما تقترب u من سرعة الضوء يقترب المقدار في المقـام مـن الصـفر وإذا اقتربت الكتلة الساكنة أيضاً من الصفر يصبح كل من هذه الكميات أعلاه محـدود القيمة. فإذا فرضنا أنه عندما تقترب u من سرعة الضوء c تقترب m_0 من الصفر يبقى المقدار $m_0/\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}$ ذو قيمة محددة. لنفرض أن هذه القيمة تسـاوى k فيكون:

$$\frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} = k$$

$$\therefore m = k \quad , \quad \vec{p} = k\vec{c} \quad , \quad \mathcal{E} = kc^2$$

وبما أن طاقة الفوتون: $\mathcal{E} = h\nu$ يكون لدينا:

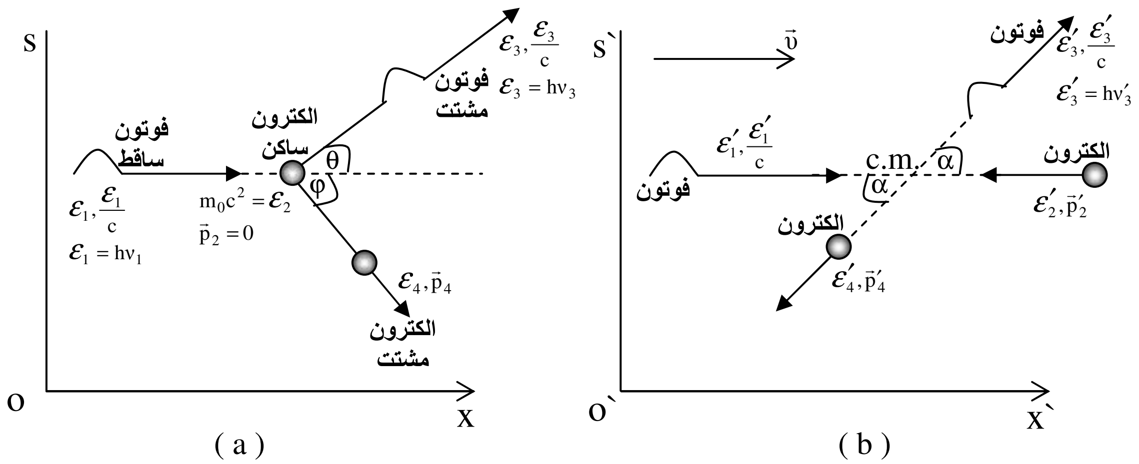
$$k = \frac{h\nu}{c^2} \quad , \quad p = \frac{h\nu}{c}$$

وهكذا وعلى ضوء النظرية النسبية الخاصة نرى أن الفوتون الذي طاقته $h\nu$ يكون له زخم خطي مساوياً إلى $h\nu/c$ وكتلة قصرية مساوية إلى $h\nu/c^2$. (كتلة السكون للفوتون تساوي صفراً). وبما أن هذه الفوتونات تسير بسرعة الضوء فمن المستحيل إيجاد محور إسناد تكون فيه الفوتونات ساكنة وهكذا فاصطلاح كتلة ساكنة لا يمكن اعتباره للفوتون. لقد استخدمت النظرية أعلاه بنجاح من قبل كومبتن لتفسير ما هو معروف الآن بتأثير كومبتن.

لقد بين كومبتن بصورة تجريبية أنه عندما تسقط حزمة أحادية التردد من الأشعة السينية على إلكترون ساكن فإن الإشعاع يتشتت بتردد أقل من تردد الإشعاع الساقط، أما الإلكترون فيرتد بسرعة معينة كما موضح في الشكل (a5 –3). ولكي نعطي تعليلاً مقبولاً لهذه الظاهرة فقد افترض كومبتن أن عملية التشتت هذه يمكن معالجتها كتصادم مرن بين فوتون منفرد و إلكترون حر.

نفرض طاقة الفوتون الساقط هي $\mathcal{E}_1 = h\nu_1$ وبزخم $\frac{\mathcal{E}_1}{c} = \frac{h\nu}{c}$ يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب ويصطدم مع إلكترون ساكن كتلته الساكنة m_0 في محور الإسناد s. نفرض أن طاقة الفوتون المتشتت $\mathcal{E}_3 = h\nu_3$ باتجاه يصنع زاوية θ مع الاحداثي x بعد التصادم و أن الإلكترون يتحرك باتجاه يصنع زاوية φ مع الاحداثي x بسرعة مساوية إلى $\vec{u}_4$ وبزخم يساوي $\vec{p}_4$ وطاقة تساوي $\mathcal{E}_4$. أما زخم الفوتون بعد التصادم فهو يساوي $\frac{\mathcal{E}_3}{c} = \frac{h\nu_3}{c}$. فيما طاقة الإلكترون الساكن قبل التصادم تساوي $\mathcal{E}_2 = m_0c^2$ وزخمه $\vec{p}_2 = 0$، كما موضح في الشكل (5–3).

هناك عدة طرق للوصول إلي النتيجة المطلوبة وإحدى هذه الطرق تطبق قوانين حفظ الطاقة والزخم على اعتبار أن التصادم مرن وتام دون استخدام محاور الإسناد `s,s أي المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة. وبما أننا نتعامل مع السُرع و الزخوم والكتل النسبية فقد فضلنا استخدام محاور الإسناد ومعادلات تحويل الزخم والطاقة آخذين بنظر الاعتبار أن الطاقة الكلية محفوظة والزخم الكلي محفوظ للنظام في حالة التصادم.



الشكل (3 – 5): تأثير كومبتن. (a) تشتت فوتون ساقط على إلكترون ساكن. (b) تأثير كومبتن. حيث يكون الزخم الكلي مساوياً 0 خلال التصادم.

الشكل (3–5) يوضح عملية تصادم فوتون مع إلكترون في حالة سكون، ونبدأ بكتابة الزخم الكلي والطاقة الكلية في محور الإسناد s قبل التصادم فيكون لدينا:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 = \vec{p}_x \qquad (46\text{-}3)$$

$$\therefore\ p_x = \frac{\mathcal{E}_1}{c} = \frac{h\nu_1}{c}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = h\nu_1 + m_0c^2 \qquad (47\text{-}3)$$

في محور الإسناد `s يكون الزخم الكلي بعد التصادم مساوياً إلى:

$$\vec{p}' = \vec{p}'_3 + \vec{p}'_4 = 0 \quad , \quad \therefore \vec{p}'_x = 0$$

والطاقة الكلية تساوي:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_3 + \mathcal{E}'_4$$

وبالاستعانة بمعادلة تحويل الطاقة من `s إلى s تكتب:

$$\mathcal{E} = \gamma\left(\mathcal{E}' + \upsilon p'_x\right) = \gamma\,\mathcal{E}'$$

$$\therefore\ \mathcal{E}'_4 + \mathcal{E}'_3 = \frac{\mathcal{E}}{\gamma} = \frac{h\nu_1 + m_0c^2}{\gamma} \qquad (48\text{-}3)$$

وبما أن الزخم الكلي يساوي صفراً بعد التصادم في `s فان:

$$\vec{p}'_3 = -\vec{p}'_4$$

$$p'^2_3 = p'^2_4$$

$$\therefore \left(\frac{\mathcal{E}'_4}{c}\right)^2 - m_0^2c^2 = \left(\frac{\mathcal{E}'_3}{c}\right)^2$$

$$\mathcal{E}'^2_4 - \mathcal{E}'^2_3 = m_0^2 c^4 \qquad (49\text{-}3)$$

وبقسمة المعادلة الأخيرة على المعادلة (3–48) ينتج أن:

$$\mathcal{E}'_4 - \mathcal{E}'_3 = \frac{\gamma m_0^2 c^4}{h\nu_1 + m_0 c^2} \qquad (50\text{-}3)$$

وبطرح المعادلة (3–50) من المعادلة (3–48) نحصل علي:

$$2\mathcal{E}'_3 = \lambda - \frac{m_0^2c^4}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - \left(m_0c^2\right)^2}{\lambda} \qquad (51\text{-}3)$$

حيث أن:

$$\lambda\gamma = h\nu_1 + m_0c^2 \quad , \quad \lambda = \frac{h\nu_1 + m_0c^2}{\gamma}$$

أما السرعة النسبية υ فتحسب من العلاقة:

$$\upsilon = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2}{h\nu_1 + m_0c^2} \cdot \frac{h\nu_1}{c} = \frac{ch\nu_1}{h\nu_1 + m_0c^2}$$

$$\therefore \beta = \frac{h\nu_1}{h\nu_1 + m_0c^2} \qquad (52\text{-}3)$$

$$\therefore \beta = \frac{h\nu_1}{\lambda\gamma}$$

وبالاستعانة بمعادلة تحويل الطاقة من s إلى `s للفوتون المشتت نلاحظ أن:

$$\mathcal{E}'_3 = \gamma\,\mathcal{E}_3\left(1 - \beta\cos\theta\right)$$

$$2\mathcal{E}_3 = \frac{2\mathcal{E}'_3}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \frac{\lambda^2 - \left(m_0c^2\right)^2}{\lambda\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

$$\therefore \frac{1}{\mathcal{E}_3} = \frac{2\lambda\gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right)}{\lambda^2 - \left(m_0c^2\right)^2}$$

نأخذ الآن المقدار الذي في البسط فيكون:

$$2\lambda\gamma(1-\beta\cos\theta) = 2\lambda\gamma\left(1-\frac{h\nu_1}{\lambda\gamma}\cos\theta\right)$$
$$= 2(h\nu_1 + m_0c^2) - 2h\nu_1\cos\theta$$
$$= 2h\nu_1(1-\cos\theta) + 2m_0c^2$$

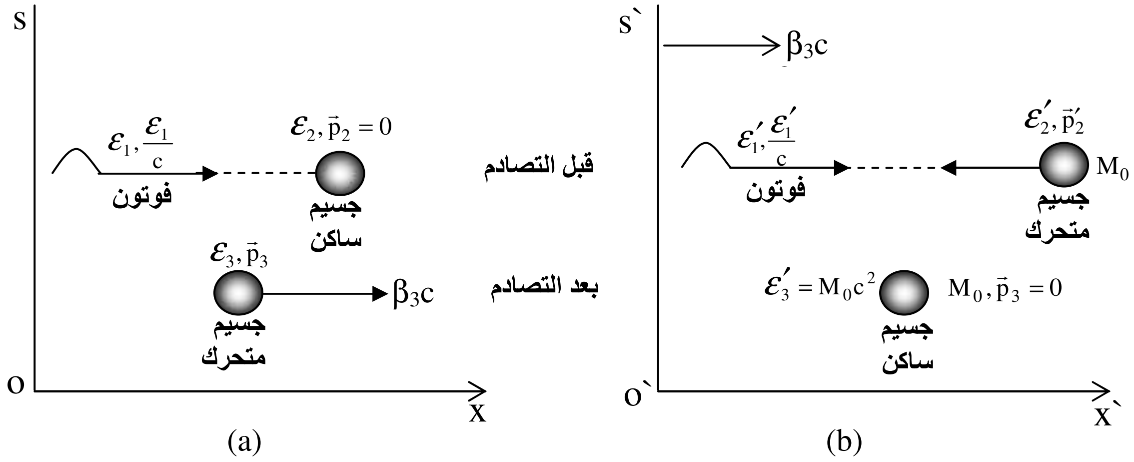
والمقدار الذي في المقام يساوي:

$$\lambda^2 - (m_0c^2)^2 = (h\nu_1 + m_0c^2)^2(1-\beta^2) - (m_0c^2)^2$$
$$= (h\nu_1 + m_0c^2)^2\left[1 - \frac{(h\nu_1)^2}{(h\nu_1 + m_0c^2)^2}\right] - (m_0c^2)^2$$
$$= (h\nu_1 + m_0c^2)^2 - (h\nu_1)^2 - (m_0c^2)^2$$
$$= 2h\nu_1 m_0c^2$$
$$\therefore \frac{1}{\mathcal{E}_3} = \frac{h\nu_1(1-\cos\theta) + m_0c^2}{h\nu_1\, m_0c^2}$$
$$\therefore \frac{1}{\mathcal{E}_3} - \frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{h\nu_1(1-\cos\theta) + m_0c^2}{h\nu_1 m_0c^2} - \frac{1}{h\nu_1} = \frac{(1-\cos\theta)}{m_0c^2}$$
$$\because \frac{1}{\mathcal{E}_3} - \frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{\lambda_3}{hc} - \frac{\lambda_1}{hc} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{hc} = \frac{\Delta\lambda}{hc}$$

$$\boxed{\therefore \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)} \qquad (53\text{-}3)$$

إن المعادلة الأخيرة (3 - 53) تنص على أنه إذا تشتت فوتون بزاوية θ بواسطة تصادمه بإلكترون حر فان طول موجة الفوتون المشتت λ_3 أكبر من طول موجة الفوتون الساقط بمقدار يساوي $0.0242\ (1-\cos\theta)\ A^o$ حيث تم التعويض بقيم عددية لكل من c, m_0, h. ولقد قيست الطاقات الحركية للإلكترونات المرتدة ووجد أنها تتفق مع القيم التجريبية المحسوبة. وهكذا لاحظنا أنه بفرض أن للفوتون زخماً يساوي $h\nu/c$ و طاقة $h\nu$ تمكن كومبتن من إعطاء تعليل لهذه الظاهرة.

3–5 امتصاص وانبعاث الفوتون.



الشكل (3 – 6): (a)امتصاص فوتون عند سقوطه علي جسيم في حالة سكون.
(b) امتصاص فوتون حيث يكون الزخم الكلي مساوياً صفراً
خلال عملية الامتصاص.

أولاً: الامتصاص.

لنفرض أن لدينا جسيماً في حالة سكون (ذرة أو نواة) كتلتـــه الســـاكنة M_0، سقط عليه فوتون طاقته $\mathcal{E}_1$ في محور الإسناد s وتم امتصاصه كلياً بواسطة هـــذا الجسيم. وقد اكتسب الجسيم الجديد بعد عملية الامتصـــاص ســـرعة تســـاوي $\beta_3 c$ وطاقة كلية تساوي $\mathcal{E}_3 = M_3 c^2 = \gamma M_0 c^2$

حيث أن:
$$M_3 = \frac{M_0}{\sqrt{\left(1-\beta_3^2\right)}} = \gamma M_0$$

كما موضح في الشكل (a6-3). أما الكتلة الساكنة فبقيت دون تغييـــر قبـــل وبعـــد عملية الامتصاص وتساوي M_0.

علينا الآن أن نحسب β_3 للجسيم الجديد باستخدام محاور الإســـناد وقـــوانين حفظ الزخم والطاقة بفرض أن عملية الامتصاص هذه هي تصادم مرن وتام. فـــي محور الإسناد `s نلاحظ في الشكل (b6-3) أنه يتحرك بسرعة ثابتة تســـاوي $\beta_3 c$.

إذن يكون التصادم في هذا المحور محفوظاً وأن الزخم الكلي للنظام يساوي صفرا قبل وبعد التصادم. نطبق الآن قانون حفظ الطاقة والزخم في s فيكون:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3$$

$$\therefore \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + M_0c^2 = \gamma M_0 c^2 \qquad (54\text{-}3)$$

نطبق مرة أخرى قانون حفظ الزخم والطاقة في `s فيكون:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}'_3$$

$$\vec{p}\,' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}'_3 = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}' = \mathcal{E}'_3 = M_0c^2 \qquad (55\text{-}3)$$

$$p' = p'_x = 0$$

وباستخدام معادلة تحويل الزخم من `s إلى s نحصل على:

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'\right) = \gamma\left(0 + \beta_3 \frac{\mathcal{E}'}{c}\right)$$

حيث أن $\beta_3 = \upsilon/c$

وبما أن: $P_x = P_1 + P_2 = P_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{c}$

$$\therefore \mathcal{E}_1 = \gamma\beta_3\,\mathcal{E}' = \beta_3\gamma M_0 c^2$$

وبالاستعانة بالعلاقة (3–54) ينتج أن:

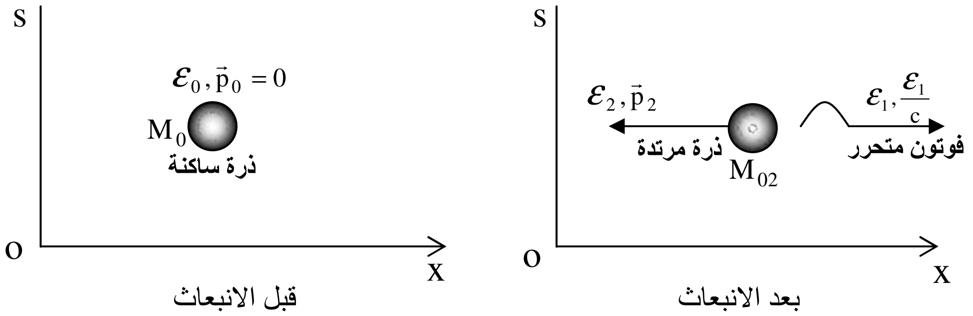
$$\therefore \beta_3 = \frac{\mathcal{E}_1}{M_0c^2 + \mathcal{E}_1} \qquad (56\text{-}3)$$

وإذا فرضنا أن $M_0c^2 >> \mathcal{E}_1$ يكون:

$$\beta_3 \cong \mathcal{E}_1 / M_0c^2$$

نستنتج من هذا أن الجسيم الذي تبقى كتلته دون تغيير خلال عملية الامتصاص يعطى دفعاً من قبل الفوتون يساوي ε_1/c على فرض أن الكتلة M_0 لا تتغير خلال التصادم كما هي الحال في ميكانيك نيوتن.

ثانياً: الانبعاث.



الشكل (3 – 7): انبعاث فوتون من جسيم في حالة سكون. يحدث تغيراً في الكتلة الساكنة للجسيم بعد الانبعاث.

لنعتبر الآن أن ذرة ساكنة كتلتها السكونية M_0 وطاقتها ε_0 انبعث منها فوتون طاقته ε_1. هذه الحالة أكثر تعقيدا لان الذرة تعاني ارتداداً بزخم p_2 وبطاقة كلية ε_2 وينتج عن هذا تغير في الكتلة الساكنة إلى M_{02}. لاحظ الشكل (3–7) قبل وبعد الانبعاث.

يستخدم هنا محور إسناد واحد هو s الذي يمثل أيضاً المحاور المختبرية وليس بالضرورة استخدام محور الإسناد `s أو ما يسمى بمحاور مركز الكتلة لكي نتجنب بعض العلاقات المعقدة.

أولاً: نطبق الآن قانون حفظ الزخم فيكون:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\therefore \frac{\varepsilon_1}{c} - p_2 = 0$$

$$c\,p_2 = \varepsilon_1 \qquad (57\text{-}3)$$

ثانياً: ونطبق قانون حفظ الطاقة فنحصل على:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

$$\therefore M_0c^2 = \mathcal{E}_1 + M_2c^2 \qquad (58\text{-}3)$$

$$\left(M_2c^2\right)^2 = \left(cp_2\right)^2 + \left(M_{02}c^2\right)^2 \qquad (59\text{-}3)$$

ومن (3−57) و(3−59) نجد أن:

$$\left(M_2c^2\right)^2 = \mathcal{E}_1^2 + \left(M_{02}c^2\right)^2 \qquad (60\text{-}3)$$

ومن العلاقة (3−58) و(3−60) نحصل على:

$$\left(M_{02}c^2\right)^2 = \left(M_0c^2 - \mathcal{E}_1\right)^2 - \mathcal{E}_1^2$$

$$\therefore \left(M_{02}c^2\right)^2 = \left(M_0c^2\right)^2 - 2M_0\,\mathcal{E}_1\,c^2 \qquad (61\text{-}3)$$

الآن $M_{02}c^2, M_0c^2$ هما طاقتا السكون للذرة في الحالة الابتدائية والنهائية و لهما قيمة محدودة وأن الفرق بينهما يساوي طاقة ثابتة:

$$\mathcal{E} = M_0c^2 - M_{02}c^2 \qquad (62\text{-}3)$$

$$\therefore \left(M_{02}c^2\right)^2 = \left(M_0c^2 - \mathcal{E}\right)^2 = \left(M_0c^2\right)^2 - 2M_0c^2\,\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 \qquad (63\text{-}3)$$

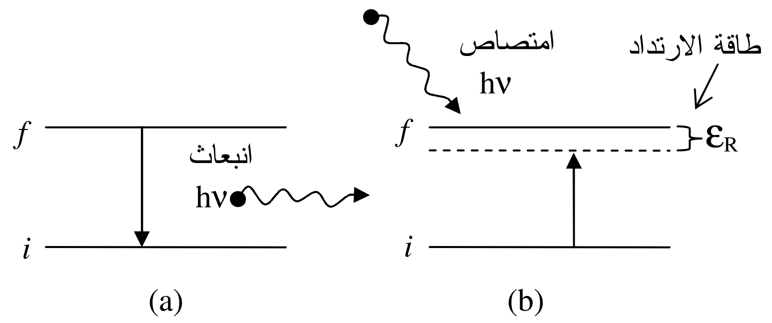
وبمقارنة العلاقتين (3−61) و (3−63) ينتج أن:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2M_0c^2}\right) \qquad (64\text{-}3)$$

ولكون طاقة الفوتون تتناسب مع التردد فان التردد يقل ويزداد الطول الموجي إلا في حالة واحدة وهي إذا أمكن تثبيت الذرة ومنعها من الارتداد كي تعطي الطاقة المتحررة $\mathcal{E}$ باجمعها إلي الفوتون المتحرر خلال عملية الانبعاث.

إن هذه النتائج لها اعتبارات فيزيائية مهمة لأنها تبين حدود إمكانية النوى والذرات بأن تقوم مرة أخرى بامتصاص أو طرد (انبعاث) الإشعاع الخاص بها. إن أي عنصر عندما يصبح في حالة استعداد للإشعاع كأنبوبة التفريغ الكهربائي مثلاً، فانه يقوم بإشعاع (انبعاث) الطيف الخطي الخاص به، كما في سلسلة بالمر للهيدروجين. إن هذه الخطوط الطيفية تكون حادة بحيث أن كل خط يمثل أطوالاً

موجية ضمن مدى ضيق جداً. إن ضيق هذه الخطوط هو تعبير عــن حقيقــة أن الذرات نفسها لا تستطيع أن تتواجد في مستويات طاقة عشوائية، أي غير محــددة (اعتباطية) ولكنها تكون مرتبطة بسلسلة ضيقة من هذه المســتويات. إن انبعــاث فوتون من الذرة عندما تنتقل من المستوي f إلى المستوي i $(i < f)$ يقابله نُقصــان معين في الطاقة (أو الكتلة) للذرة كما تصفه العلاقة (3−62). فإذا صــادف هــذا الفوتون المنبعث و الذي يحمل طاقة مقدارها hν، ذرة أخرى مماثلــة تقــع فــي المستوي i وهي في حالة سكون فلن تكون هذه الطاقة كافية لرفع تلك الذرة إلــى المستوي f لأن جزءاً صغيراً من طاقة الفوتون قد صُرِف على طاقة ارتداد الذرة، لذلك ينبغي أن يؤخذ بعين الاعتبار التأثير الارتدادي للذرة خلال عمليات الانبعاث والامتصاص كما بالشكل (3−8). لقد قام العالم موسباور بدراسة التأثير الارتدادي للذرات و النوى خلال عمليات الامتصاص و الانبعاث الرنيني، حيث تمكن مــن التغلب على طاقة الارتداد للنوى باستخدام مصدر مشع متحــرك، وتســمى هــذه الظاهرة بظاهرة موسباور

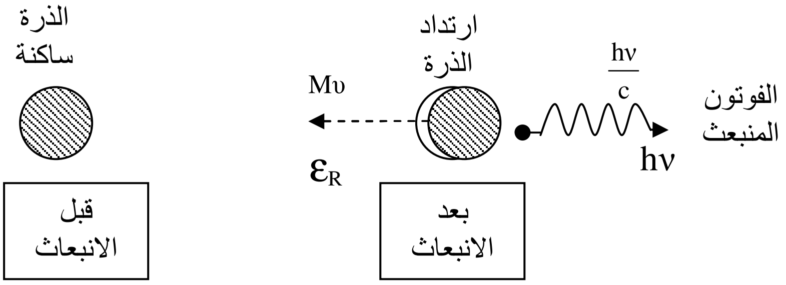


الشكل (3−8): يوضح عملية الانبعاث (a) و الامتصاص (b) في الذرات.

فمن قانون حفظ الزخم الكلي قبل الانبعاث وبعد الانبعاث:

$$0 = M\,\upsilon - \frac{h\nu}{c} \qquad (65\text{-}3)$$

حيث أن الصفر في الجزء الأيسر للمعادلة يدل على أن الذرة ساكنة قبل عملية الانبعاث أما $M\upsilon$ في الجزء الأيمن من المعادلة فهو زخم الذرة المرتدة و $\frac{h\nu}{c}$ زخم الفوتون المنبعث كما بالشكل (3-9).



الشكل (3-9): يوضح عملية الارتداد الناتجة عن انبعاث فوتون من الذرة.

من المعادلة الأخيرة نجد أن سرعة ارتداد الذرة تساوي:

$$\upsilon=\frac{h\nu}{Mc}$$

وبما أن طاقة الارتداد ε_R تساوي الطاقة الحركية للذرة، إذن من سرعة ارتداد الذرة يمكننا حساب طاقة الارتداد كما يلي:

$$\varepsilon_R=\frac{1}{2}M\upsilon^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{h\nu}{Mc}\right)^2$$

$$=\frac{(h\nu)^2}{2Mc^2}=\frac{\varepsilon^2}{2Mc^2}$$

إذاً نستنتج أنه إذا كانت مستويات الطاقة ضيقة بصورة تامة وإذا كانت الذرات التي تولد الإشعاع أو تمتصه في حالة سكون فإن هذه الذرات تكون شفافةً للإشعاع الذي ينبعث منها بغض النظر عن التأثيرات الجانبية التي تُغير الحالة التي وصفت كالحركة الناتجة عن الإثارة الحرارية التي تبطل التأثيرات الارتدادية للذرات خلال عمليات الانبعاث أو الامتصاص*.

* لمزيد من المعلومات عن هذه الظاهرة يمكن مراجعة كتاب "مقرر بيركلي" في الفيزياء الميكانيكا المجلد الأول الصفحات 551-553.

أمثلة محلولة:

المثال (1) :

جسيمان متماثلان، الكتلة الساكنة لكل منهما $2.4GeV/c^2$ يسيران في خط مستقيم واحد موازٍ للاحداثي x. سرعة الأول 0.8c وسرعة الثاني -0.6c حصل بينهما تصادم مرن وتام. مستخدما المحاور المختبرية s ومحاور مركز الكتلة `s أحسب: (1) كتلة كل منهما قبل التصادم في s، (2) سرعة مركز الكتلة، (3) سرعة وكتلة كل منهما قبل التصادم في `s، (4) طاقة وزخم كل منهما بعد التصادم في `s، (5) انحراف كل منهما عن الاحداثي x بعد التصادم في s. علماً بان انحراف كل منهما عن الاحداثي `x بعد التصادم في `s يساوي 53°.

الحل:

(1) بالنسبة للجسيم الأول قبل التصادم في s فان كتلته تساوي:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-u_1^2/c^2\right)}} = \frac{2.4\,GeV/c^2}{\sqrt{(1-0.64)}} = 4\,GeV/c^2$$

وبالنسبة للجسيم الثاني فإن كتلته تساوي:

$$m_2 = \frac{2.4\,GeV/c^2}{\sqrt{(1-0.36)}} = 3\,GeV/c^2$$

(2) سرعة مركز الكتلة للجسيمين في حالة تصادم تساوي:

$$\upsilon_c = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4\times 0.8 - 3\times 0.6)GeV/c}{(3+4)GeV/c^2} = 0.2\,c$$

وهي أيضا سرعة محور الإسناد `s الذي يكون فيه الزخم الكلي للجسيمين المتصادمين يساوي صفراً.

(3) بالنسبة للجسيم الأول قبل التصادم في `s فان سرعته تساوي:

$$u_1' = \frac{u_1 - \upsilon_c}{1 - \frac{\upsilon_c}{c^2}u_1} = \frac{(0.8 - 0.2)c}{1 - \frac{0.2\,c}{c^2}.0.8\,c} = 0.7\,c$$

وكتلته في `s تساوي:

$$m'_1 = \frac{2.4\,\text{GeV/c}^2}{\sqrt{\left(1-(0.7)^2\right)}} = 3.4\,\text{GeV/c}^2$$

وبالنسبة للجسيم الثاني في `s قبل التصادم فان:

$$u'_2 = \frac{(-0.6-0.2)c}{1-\frac{0.2c}{c^2}(-0.6c)} = -0.7c$$

وكتلته في `s قبل التصادم تساوي:

$$m'_2 = \frac{2.4\text{GeV/c}^2}{\sqrt{\left(1-(0.7)^2\right)}} = 3.4\text{GeV/c}^2$$

(4) إذا كانت كل من $\mathcal{E}'_2, \mathcal{E}'_1$ الطاقة الكلية لكل من الجسيمين قبل التصادم فـــي `s وان $\mathcal{E}'_4, \mathcal{E}'_3$ الطاقة الكلية لكل منهما بعد التصادم فان:

$$\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}'_3 + \mathcal{E}'_4 = \mathcal{E}' = (m'_1 + m'_2)c^2$$

وبما أن الكتلة متساوية إذن الطاقات الكلية ستكون متساوية أيضاً في `s فيصـــبح لدينا قبل التصادم أن $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2$

وبما أن $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}'_3 + \vec{p}'_4 = 0$ لذلك $p'^2_3 = p'^2_4$ وبما أن:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

يكون

$$\mathcal{E}'_3 = \mathcal{E}'_4 = \frac{1}{2}\mathcal{E}' = \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2)c^2 = 3.4\,\text{GeV}$$

وهذا يعني أن:

$$u'_1 = -u'_2 \quad , \quad u'_3 = -u'_4$$

ولما كانت جميع الطاقات الكلية للجسيمين متساوية قبل وبعد عملية التصادم في `s ينتج عن ذلك أن جميع السُرع متساوية بالمقدار أي أن:

$$u'_1 = u'_3 = u'_2 = u'_4 = 0.7\,c$$

وهكذا فان الزخم لكل من الجسيمين في `s بعد التصادم يساوي:

$$p'_3 = m'_3 u'_3 = 3.4 \times (+0.7)\text{GeV/c} = +2.38\,\text{Gev/c}$$

$$p'_4 = m'_4 u'_4 = 3.4 \times (-0.7)\text{GeV/c} = -2.38\,\text{GeV/c}$$

(5) نفرض أن θ انحراف الجسيم الأول في s بعد التصادم

$$\therefore\ p_3\cos\theta = \gamma\left(p'_3\cos\alpha + \frac{\upsilon_c}{c^2}\mathcal{E}'_3\right)$$

$$p_3\sin\theta = p'_3\sin\alpha$$

حيث أن α الزاوية التي يصنعها اتجاه الجسيم الأول في `s بعد التصادم [لاحظ الشكل (3 – 3)] وهنا $\alpha = 53^o$.

$$\therefore\ p_3\cos\theta = \gamma(2.38\times 0.6 + 0.2\times 3.4)$$

$$p_3\sin\theta = 2.38\times 0.8$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{2.38\times 0.8}{2.108\,\gamma}$$

حيث أن :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\upsilon_c^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.2)^2}} \cong 1.0206$$

$$\therefore\ \tan\theta = 0.8850$$

$$\therefore\ \theta = 41.5^0$$

نفرض أن φ انحراف الجسيم الثاني في s بعد التصادم

$$\therefore\ p_4\cos\varphi = \gamma\left(p'_4\cos\alpha + \frac{\upsilon_c}{c^2}\mathcal{E}'_4\right)$$

$$p_4\sin\varphi = P'_4\sin\alpha$$

$$\therefore\ \tan\varphi = \frac{\sin\alpha}{\gamma\left(\cos\alpha + \frac{\upsilon_c}{c^2}\frac{\mathcal{E}'_4}{p'_4}\right)} = 2.4755$$

$$\therefore\ \varphi = -68^o$$

المثال (2):

جسيم كتلته الساكنة m_0 وزخمه $2\sqrt{2}\,m_0c$ اصطدم بجسيم مماثل لـه كـان ساكناً فاتحد معه بعد التصادم مكوناً كتلة مشتركة. مستعيناً بمحاور الإسناد وبقوانين حفظ الطاقة والزخم. جد :(1) سرعة الكتلة المشتركة. (2) الكتلة الساكنة للجسيم.

الحل:

في محور الإسناد s قبل التصادم لدينا:

أولاً:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \sqrt{(cp)^2 + \left(m_0c^2\right)^2} + m_0c^2$$
$$= \sqrt{8\left(m_0c^2\right)^2 + \left(m_0c^2\right)^2} + m_0c^2$$

$$\therefore \mathcal{E} = 4\,m_0c^2 \qquad (1)$$

وبالاستعانة بمعادلة تحويل الطاقة من `s إلى s نحصل على:

$$\mathcal{E} = \gamma\left(\mathcal{E}' + \upsilon p'_x\right) = \gamma\,\mathcal{E}'$$

حيث أن `s يتحرك بسرعة υ نسبة إلى s فتكون الكتلة المشتركة في حالة سكون. لاحظ الشكل (3-4).

$$\therefore \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{\gamma} = \frac{4\,m_0c^2}{\gamma}$$

ومن معادلة تحويل الزخم نجد أن:

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'\right) = \frac{\gamma\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'$$
$$= \left(\frac{\gamma\upsilon}{c^2}\right)\left(\frac{4\,m_0c^2}{\gamma}\right) = 4\,m_0\upsilon$$
$$\therefore \upsilon = \frac{2\sqrt{2}\,m_0c}{4\,m_0} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

ثانياً:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt{2}$$

في محور الإسناد `s بعد التصادم لدينا:

$$Q' = T' = \mathcal{E}' - 2\,m_0c^2$$
$$\therefore \frac{Q'}{c^2} = \frac{\mathcal{E}'}{c^2} - 2\,m_0 = \frac{4\,m_0}{\gamma} - 2\,m_0 = \frac{4\,m_0}{\sqrt{2}} - 2\,m_0$$
$$= 2\,m_0\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\therefore \mathcal{E} = \gamma\mathcal{E}' = \gamma\left(2m_0c^2 + Q'\right)c^2 = \gamma\left(2m_0 + 2\sqrt{2}\,m_0 - 2m_0\right)c^2$$

ونلاحظ مرة أخرى كما في المعادلة (1) أن الطاقة الكلية $\mathcal{E}$ تساوي: $\mathcal{E} = 4m_0c^2$

$$\therefore M_0 = \frac{\mathcal{E}}{\gamma c^2} = \frac{4m_0}{\gamma} = \frac{4m_0}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,m_0$$

المثال (3):

جسيم طاقته الحركية تساوي طاقة سكونه، يصطدم مع جسيم آخر مماثل لـــه كان ساكناً، ونتيجة لهذا التصادم انحرف اتجاهه خلال زاوية 45°. جد طاقته الحركية بعد التصادم علماً بأن كتلته الساكنة تساوي m_0.

الحل : بالنسبة للجسيم الساقط الذي سرعته u_1 في s نكتب:

$$\mathcal{E} = mc^2 = T + m_0c^2 = m_0c^2 + m_0c^2 = 2m_0c^2$$

$$\therefore m = 2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - u_1^2/c^2\right)}}$$

و من هذه العلاقة نجد أن:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

إذا كانت υ السرعة النسبية بين محوري الإسناد s و `s حيث أن الزخم الكلي في `s يساوي صفراً يكون:

$$\upsilon = \frac{u_1}{1 + \sqrt{\left(1 - u_1^2/c^2\right)}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)}}$$

$$\therefore \upsilon = \frac{c}{\sqrt{3}} = u_1' = -u_2'$$

حيث أن u'_2, u'_1 − سرعة الجسيمين على التوالي في محور الإسناد `s قبل التصادم.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{\gamma(1+\cos\alpha)} \quad , \quad \therefore \tan 45 = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+\cos\alpha)}$$

$$\therefore 5\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$\alpha = 180^{\circ} \quad , \quad 101.5^{\circ}$$

بما أن التصادم مرن وتام بين جسيمين متماثلين أحدهما ساكن والآخر في حالة حركة من الممكن أن نكتب:

$$\mathcal{E}'_3 = \mathcal{E}'_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

حيث أن $\mathcal{E}'_3, \mathcal{E}'_1$ الطاقة الكلية للجسيم الساقط قبل وبعد التصادم في محور الإسناد `s.

$$\therefore \mathcal{E}'_3 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} m_0 c^2$$

ومن معادلة تحويل الطاقة من `s إلي s للجسيم الساقط بعد التصادم يحصل أن:

$$\mathcal{E}_3 = \gamma\left(\mathcal{E}'_3 + \upsilon p'_{3x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} m_0 c^2 + \frac{c}{\sqrt{3}} p'_{3x}\right] \qquad (1)$$

$$\because c p'_3 = \sqrt{\mathcal{E}_3^2 - \left(m_0 c^2\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} m_0 c^2 - \left(m_0 c^2\right)^2}$$

$$\therefore p'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0 c$$

$$\therefore p'_{3x} = p'_3 \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0 c\left(-\frac{1}{5}\right)$$

أو $$= \frac{1}{\sqrt{2}} m_0 c(-1)$$

وبتعويض القيمة الأولى للزخم باتجاه الاحداثي x للجسيم الساقط في `s في المعادلة (1) نحصل على:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{7}{5} m_0 c^2 = T_3 + m_0 c^2$$

$$\therefore T_3 = \frac{2}{5} m_0 c^2$$

وبتعويض القيمة الثانية في المعادلة (1) نحصل على:

$$\mathcal{E}_3 = m_0 c^2 == T_3 + m_0 c^2$$

$$\therefore T_3 = 0$$

المثال (4):

فوتون طاقته $\frac{2 m_0 c^2}{3}$ يتحرك باتجاه الاحداثي x، يصطدم و يُمتص من قبل جسيم كتلته الساكنة m_0. جد مقدار واتجاه سرعة الجسيم مباشرة بعد امتصاصه للفوتون.

الحل:

نطبق قانون حفظ الطاقة والزخم في محور الإسناد s ومن الممكن عدم استخدام محور الإسناد `s إلا إذا طلب منا ذلك أو إذا لاحظنا أن استخدام محور الإسناد `s يسهل علينا الحسابات.

من قانون حفظ الطاقة لدينا قبل عملية الامتصاص:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{2 m_0 c^2}{3} + m_0 c^2 = \frac{5 m_0 c^2}{3}$$

وبعد عملية الامتصاص مباشرة فان:

$$\mathcal{E} = \gamma M_0 c^2$$

حيث أن M_0 الكتلة الساكنة للجسيم بعد الامتصاص وأن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \upsilon^2/c^2)}}$$

$$\therefore \gamma M_0 c^2 = \frac{5 m_0 c^2}{3} \qquad (1)$$

ومن قانون الزخم:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3$$

$$\therefore p = p_{1x} = \frac{\mathcal{E}_1}{c} = \frac{2 m_0 c}{3} = \gamma M_0 \upsilon$$

$$\therefore \gamma M_0 = \frac{2 m_0 c}{3 \upsilon}$$

حيث أن υ سرعة الجسيم بعد عملية الامتصاص. وبالتعويض عن γM_0 في المعادلة (1) نحصل على:

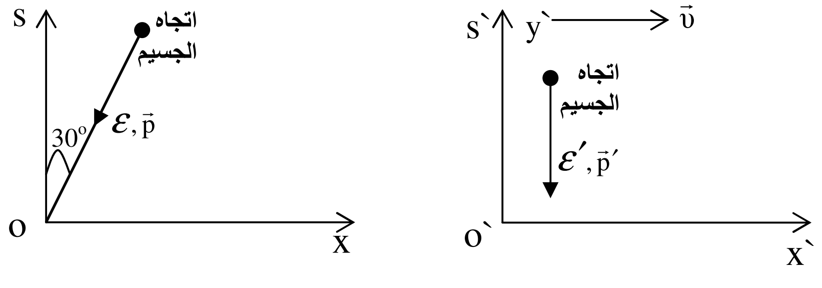
$$\frac{5 m_0 c^2}{3} = \frac{2 m_0 c^3}{3 \upsilon}$$

$$\therefore \upsilon = \frac{2}{5} c$$

أما اتجاه حركة الجسيم بعد عملية الامتصاص فهي باتجاه الاحداثي x لأن مركبة الزخم باتجاه الاحداثي y تساوي صفراً.

المثال (5):

جسيم طاقته $\mathcal{E}$ وكتلته الساكنة $\frac{3\mathcal{E}}{5c^2}$ يسير باتجاه نقطة الأصل o في محور الإسناد s ويعمل اتجاهه زاوية مقدارها 30° مع الاحداثي y. جد طاقة الجسيم في محور إسناد بحيث يُشاهد الجسيم متحركاً نحو الأسفل باتجاه محور y السالب، وما هي السرعة النسبية بين محوري الإسناد.



الشكل (3-9): جسيم يشاهد متحركاً بزاوية 30° مع الاحداثي y في s. في `s يشاهد الجسيم متحركاً راسياً نحو الأسفل.

الحل:

في محور الإسناد s لدينا:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = \left(\frac{3\mathcal{E}}{5c^2}\right)^2 c^2$$

حيث أن $\vec{p}$ زخم الجسيم في محور الإسناد s الذي يصنع زاوية مقدارها 30° مع المحور y، لاحظ الشكل (3-9).

$$\therefore p = \frac{4\mathcal{E}}{5c}$$

ومن معادلات تحويل الزخم من s إلى `s باتجاه الاحداثي y نجد أن:

$$p'_y = p_y = -\frac{4\mathcal{E}}{5c}\cos 30$$

$$\therefore p'_y = -\frac{2\sqrt{3}\mathcal{E}}{5c} = p'$$

الإشارة السالبة تعني أن اتجاه مركبة الزخم باتجاه الاحداثي y السالب. `P يمثل الزخم الكلي للجسيم في محور الإسناد `s.

$$\therefore p'_x = \gamma\left(-p\sin 30 - \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}\right) = 0$$

$$\therefore \upsilon = -\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4\mathcal{E}}{5c}\times c^2}{\mathcal{E}} = -\frac{2}{5}c = -0.4\,c$$

وبالاستعانة بمعادلة تحويل الطاقة من s إلى `s نجد:

$$\mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x) = \gamma(\mathcal{E} - (-\upsilon p \ \sin 30))$$

حيث أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{25}\right)}} = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

$$\therefore \mathcal{E}' = \frac{5}{\sqrt{21}}\left(\mathcal{E} - 0.4c\times\frac{4\mathcal{E}}{5c}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \mathcal{E}' = \frac{4.2\mathcal{E}}{\sqrt{21}}$$

المثال (6):

الطاقة الحركية K لنظام في المحاور المختبرية يرتبط مع الطاقة الحركية K^* في محاور مركز الكتلة في الحالة غير النسبية حسب العلاقة الآتية: $K = K^* + \frac{1}{2}MV^2$ إذ أن M الكتلة الكلية للنظام وأن V سرعة مركز الكتلة. ما التعبير المماثل في الحالة النسبية. وضح أيضاً أن هذا التعبير يختزل إلى النتيجة أعلاه إذا أُخذ بنظر الاعتبار أن جميع السُرع هي أقل بكثير من سرعة الضوء في الفراغ.

الحل:

قد يطلب منا في مثال آخر إثبات العلاقة $K = K^* + \frac{1}{2}MV^2$ وعلينا الآن أن نوضح كيفية استنتاجها وكالأتي:

بما أن K تمثل الطاقة الحركية للنظام في المحاور المختبرية حيث أن الجسيم الأول متحرك باتجاه الاحداثي x الموجب وأن الجسيم الثاني كان ساكنا فمن الممكن التعبير عن هذه الطاقة الحركية بالشكل:

$$K = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2$$

أما في محاور مركز الكتلة فمن الممكن التعبير عن K^* بالشكل:

$$K^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

حيث أن v_1, m_1 كتلة وسرعة الجسيم الأول وأن v_2, m_2 كتلة و سرعة الجسيم الثاني على التوالي. وبما أن الزخم الكلي يساوي صفراً في هذه المحاور فان:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\therefore v_2 = -\frac{m_1 \upsilon_1}{M} = -v$$

حيث أن $M=m_1+m_2$ وأن v السرعة النسبية بين محوري الإسناد.

$$\therefore v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1} = -\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(-\frac{m_1 \upsilon_1}{M}\right) = \frac{m_2 \upsilon_1}{M}$$

$$\therefore K^* = \left(\frac{m_1}{2}\right)\left(\frac{m_2\,\upsilon_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{2}\right)\left(\frac{m_1\upsilon_1}{M}\right)^2 = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2M}$$

$$\therefore K^* + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2M} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)\left(\frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1{\upsilon_1}^2$$

$$\boxed{\therefore K = K^* + \frac{1}{2}MV^2}$$

الآن في الحالة النسبية يكون:

$$\mathcal{E} = \gamma\,\mathcal{E}^*$$

$$\because \mathcal{E} = K + M_0c^2$$

حيث أن $M_0=m_{01}+m_{02}$

$$\mathcal{E}^* = K^* + M_0c^2$$

$$\therefore K = \frac{K^* + M_0c^2}{\sqrt{\left(1 - V^2/c^2\right)}} - M_0c^2$$

فإذا فرضنا الآن أن $V << c$ فان:

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \cong 1 + \frac{V^2}{2c^2}$$

$$\therefore K = \left(K^* + M_0c^2\right)\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) - M_0c^2$$

$$\cong K^* + M_0c^2 + \frac{1}{2}K^*\left(\frac{v^2}{c^2}\right) - M_0c^2 + \frac{1}{2}M_0V^2$$

$$\boxed{\therefore K \cong K^* + \frac{1}{2}MV^2}$$

حيث أن $M=M_0$ في الحالة غير النسبية.

المثال (7):

بروتون يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجـــب، طاقتـــه الحركيـــة 437 MeV اصطدم بآخر مماثل له كان ساكناً. فإذا علمت أن كلاً من البروتـــونين بعـــد

التصادم يمتلك طاقة كلية مساوية للآخر. احسب الزاوية المحصــورة بــين اتجاهيهما.

الحل:

نفرض أن m_0 الكتلة الساكنة لأي من البروتونين، و أن m كتلة البروتون الســاقط الذي طاقته الحركية T = 437MeV. نفرض أيضاً أن $\vec{p}_1, \mathcal{E}_1$ الطاقة الكلية و زخم البروتون الساقط و أن $\vec{p}_2, \mathcal{E}_2 = 0$ الطاقة الكلية و زخم البروتون الساكن.

من قانون حفظ الطاقة نكتب:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \qquad (1)$$

إذا أن $\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3$ الطاقة الكلية للبروتونين بعد التصادم في المحــاور المختبريــة s. وتجدر الإشارة إلى أننا في هذا التمرين لا نستخدم محاور مركــز الكتلــة لعــدم الحاجة إلى ذلك ولأننا نريد أن نوضح طريقة حل هــذا التمــرين أو غيــره دون اللجوء إلي معادلات التحويل الخاصة بالطاقة والزخم.

ومن قانون حفظ الزخم نكتب:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \qquad (2)$$

إذ أن $\vec{p}_4, \vec{p}_3$ زخم البروتونين بعد التصادم

وبما أن:

$$\mathcal{E}_1 = T_1 + m_0 c^2$$
$$\mathcal{E}_2 = m_0 c^2$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4$$

يحصل أن:

$$T_1 + 2\,m_0 c^2 = 2\mathcal{E}_3 = 2\mathcal{E}_4$$

$$\therefore\ \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4 = \frac{T_1}{2} + m_0 c^2 \qquad (3)$$

$$p_3^2 = p_4^2 = \frac{\mathcal{E}_3^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}_4^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \qquad (4)$$

من العلاقة (2) نجد أن:

$$p_1^2 = p_3^2 + p_4^2 + 2\,p_3 p_4 \cos\theta$$

إذ أن θ الزاوية المحصورة بين $\vec{p}_3$ و $\vec{p}_4$

$$\therefore p_1^2 = 2p_3^2(1+\cos\theta) = 2p_4^2(1+\cos\theta)$$

$$\therefore p_1 = 2p_3\cos\frac{\theta}{2} = 2p_4\cos\frac{\theta}{2} \qquad (5)$$

$$\because p_1^2 = \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} - m_0^2c^2 = \frac{(T_1+m_0c^2)^2}{c^2} - m_0^2c^2$$

$$\therefore p_1^2 = \left(\frac{T_1}{c}\right)^2 + 2T_1m_0$$

ومن العلاقة (4)

$$p_3^2 = p_4^2 = \frac{\left(\frac{T_1}{2}+m_0c^2\right)^2}{c^2} - m_0c^2$$

$$\therefore p_3^2 = p_4^2 = \left(\frac{T_1}{2c}\right)^2 + T_1m_0 \qquad (6)$$

ومن العلاقة (5) نلاحظ أن:

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{p_1}{2p_3}\right)^2 = \frac{\left(\frac{T_1}{c}\right)^2 + 2T_1m_0}{\left(\frac{T_1}{2c}\right)^2 + T_1m_0} \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{T_1 + 2m_0c^2}{T_1 + 4m_0c^2}}$$

وبما أن طاقة السكون للبروتون تساوي:

$$\because m_0c^2 = 939.4\text{MeV}$$

لذا يكون:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{437 + 939.4\times 2}{437 + 939.4\times 4}}$$

$$\therefore \theta = 84^{o}$$

المثال (8):

سقط فوتون يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب بطاقة مساوية إلـــى $\frac{2m_0c^2}{3}$ على جسيم كان ساكناً كتلته الساكنة m_0 فانحرف الفوتون عن اتجاهه الأصلي بزاوية 90°. أحسب طاقة الفوتون المتشتت وزخمه في محور الإسناد s ثـــم جد طاقته في محور الإسناد `s حيث يكون الزخم الكلي مساوياً صفراً.

الحل:

نطبق أولاً قانون حفظ الطاقة في محور الإسناد s فنكتب:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$$

حيث أن: $p_2 = 0 \quad , \quad \mathcal{E}_3 = cp_3 \quad , \quad \mathcal{E}_1 = cp_1$

$$\therefore \frac{2m_0c^2}{3} + m_0c^2 = cp_3 + \mathcal{E}_4 \qquad (1)$$

وبتطبيق قانون حفظ الزخم نجد أن:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

$$\frac{2m_0c}{3} = p_3\cos 90 + p_4\cos\varphi \qquad (2)$$

$$p_3\sin 90 = p_4\sin\varphi \qquad (3)$$

حيث أن φ الزاوية التي انحرف بها الجسيم عن اتجاه الفوتون الساقط.

$$\mathcal{E}_4^2 = (cp_4)^2 + (m_0c^2)^2 \qquad (4)$$

بتربيع (2) و (3) ثم جمعهما نحصل على:

$$(cp_4)^2 = (cp_3)^2 + \left(\frac{2m_0c^2}{3}\right)^2 \qquad (5)$$

وبتعويض قيمة (cp_4) من المعادلة (5) في المعادلة (4) ينتج:

$$\mathcal{E}_4^2 - (m_0c^2)^2 = (cp_3)^2 + \left(\frac{2m_0c^2}{3}\right)^2 \qquad (6)$$

وبالاستعانة بالمعادلة (1) لتعويض قيمة (cp_3) في المعادلة (6) نصل إلي النتيجة:

$$\left(\frac{5}{3}m_0c^2 - cp_3\right)^2 - \left(m_0c^2\right)^2 = (cp_3)^2 + \left(\frac{2m_0c^2}{3}\right)^2$$

وباختزال المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$p_3 = \frac{2}{5}m_0c$$

$$\therefore \mathcal{E}_3 = cp_3 = \frac{2}{5}m_0c^2$$

بما أن الزخم الكلي يساوي صفراً في محور الإسناد `s يكون:

$$\beta = \frac{cp_x}{\mathcal{E}} = \frac{cp_1}{\mathcal{E}} = \frac{\frac{2}{3}m_0c^2}{\frac{5}{3}m_0c^2} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)}} = 1.09 \cong 1.1$$

ومن معادلة تحويل الطاقة من s إلى `s ينتج أن:

$$\mathcal{E}_3' = \gamma\left(\mathcal{E}_3 - \beta cp_{3x}\right) = \gamma\mathcal{E}_3$$

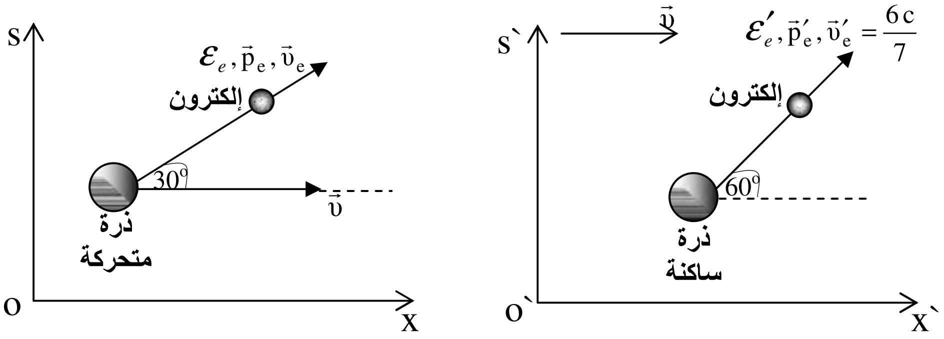
$$\therefore \mathcal{E}_3' = (1.09)\left(\frac{2}{5}m_0c^2\right)$$

إذن طاقة الفوتون في `s تساوي:

$$\therefore \mathcal{E}_3' = 0.44\ m_0c^2$$

المثال (9):

ذرة كانت تتحرك في خط مستقيم عندما انطلق منها إلكترون. ولوحظ أن الإلكترون انطلق بالنسبة للذرة نفسها بسرعة تساوي $\frac{6}{7}c$ وباتجاه يصنع زاوية مقدارها 60° مع خط حركتها. مُشاهد في حالة سكون بالنسبة للذرة استطاع أن يقيس الزاوية بين خط حركة الذرة والإلكترون فوجدها تساوي 30°. احسب سرعة الذرة.



الشكل (3−10): انطلاق إلكترون من ذرة متحركة في s. في `s تشاهد الذرة ساكنة ويبقى الإلكترون متحركاً مع تغير اتجاهه.

الحل:

نفرض أن الذرة تتحرك بسرعة $\vec{\upsilon}$ في محور الإسناد s باتجاه الاحداثي x وانطلق منها إلكترون يصنع زاوية مقدارها 30° مع الاحداثي x، لاحظ الشكل (3−10). في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة $\vec{\upsilon}$ نسبة إلى محور الإسناد s تصبح الـــذرة في حالة سكون. إذن الإلكترون يعمل زاوية $60^o$ مع الاحداثي `x.

باستخدام معادلات تحويل الطاقة من `s إلي s نجد أن:

$$cp_e \sin 30 = cp'_e \sin 60$$

$$cp_e \cos 30 = \gamma\left(cp'_e \cos 60 + \beta \mathcal{E}'_e\right)$$

$$\therefore \tan 30 \quad \frac{1}{\gamma\left[\cot 60 + \frac{\beta}{\sin 60}\left(\frac{\mathcal{E}'_e}{cp'_e}\right)\right]}$$

$$\therefore \gamma = \frac{3}{1 + 2\beta\left(\frac{\mathcal{E}'_e}{cp'_e}\right)}$$

ومن العلاقة بين الطاقة والزخم نكتب:

$$\mathcal{E}'^2_e = (cp'_e)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\mathcal{E}'_e}{cp'_e}\right)^2 = 1 + \left(\frac{m_0 c^2}{cp'_e}\right)^2$$

ولكن نلاحظ أن: $cp'_e = c\gamma'_e m_0 \upsilon'_e$

حيث أن: $\upsilon'_e = \frac{6c}{7}$ وأن : $\gamma'_e = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta'^2_e)}}$

$$\therefore \left(\frac{\mathcal{E}'_e}{cp'_e}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\gamma'^2_e \beta'^2_e} = \frac{1}{\beta'^2_e} = \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\therefore \gamma = \frac{3}{1 + 2\beta\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{9}{3 + 7\beta}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{3 + 7\beta}{9}$$

$$\therefore 1 - \beta^2 = \left(\frac{3 + 7\beta}{9}\right)^2$$

$$\therefore 130\beta^2 + 42\beta - 72 = 0$$

$$(5\beta - 3)(26\beta + 24) = 0$$

$$\therefore \beta = \frac{3}{5}$$

$$\upsilon = \frac{3c}{5}$$

المثال (10):

حزمة من الفوتونات تمتلك طاقة عالية مساوية إلى $\mathcal{E}_0$ $(10MeV \ll \mathcal{E}_0)$ وجهت نحو كتلة مادية ثابتة. استنتج أن طاقة الفوتون Q المتشتتة نحو الخلف بعد سقوطها على المادة لا تعتمد على طاقة الفوتونات الساقطة $\mathcal{E}_0$ ثم جد قيمة Q.

الحل:

نفرض أنه عند سقوط الفوتونات على المادة ثم انعكاسها منها تتحرر الكترونـــات يكون اتجاهها معاكساً لاتجاه الفوتونات وكما موضح في الشكل (3-11).

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة بفرض أن التصادم مرن وتام فيكون:

$$\mathcal{E}_0 + m_0c^2 = Q + \gamma m_0c^2 \qquad (1)$$

ومن قانون حفظ الزخم:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{c} = -\frac{Q}{c} + \gamma\beta m_0 c$$

$$\therefore \mathcal{E}_0 + Q = \gamma\beta m_0c^2 \qquad (2)$$

$$\because \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\therefore \gamma^2\beta^2 m_0^2c^4 = \left(\gamma m_0c^2\right)^2 - \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\therefore (\mathcal{E}_0 + Q)^2 + \left(m_0c^2\right)^2 = \left[(\mathcal{E}_0 - Q) + m_0c^2\right]^2$$

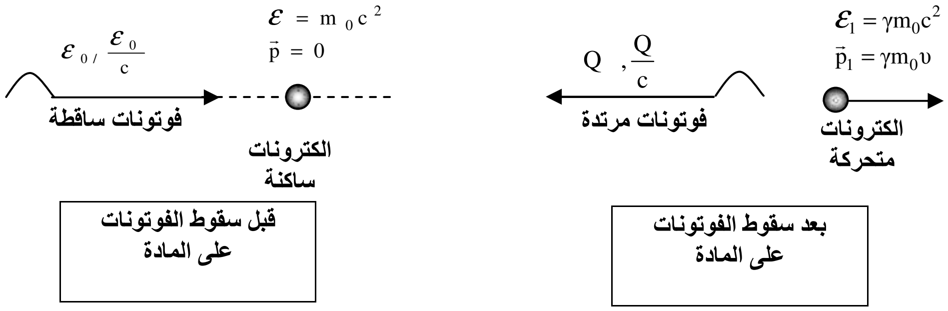
ومن هذه العلاقة الأخيرة نحصل:

$$Q = \frac{1/2\, m_0c^2}{1 + \dfrac{1/2\, m_0c^2}{\mathcal{E}_0}} \cong \frac{1}{2} m_0c^2$$

من الممكن إثبات أن $\frac{1}{2} m_0c^2 << \mathcal{E}_0$ وكالآتي:

$$\frac{1}{2} m_0c^2 = \frac{9.11\times10^{-31}\times9\times10^{16}}{2\times1.6\times10^{-19}} = 0.25\,\text{MeV}$$

وبما أن $\mathcal{E}_0 >> 10\,\text{MeV}$ نستنتج أن النسبة $\frac{1/2\,m_0c^2}{\mathcal{E}_0}$ صــــغيرة مقارنــــة بالواحــــد الصحيح، وهذا يبين أن Q إلى حدٍ ما لا تعتمد على طاقة الفوتونات الساقطة.



الشكل (3 – 11): سقوط فوتون علي المادة. الفوتون المتشتت نحو الخلف لا تعتمد طاقته على طاقة الفوتون الساقط.

تمارين الفصل الثالث

1- اثبت أن الطاقة الحركية لمنظومة تتكون من جسيمين في محـــاور مركـــز الكتلة قبل التصادم تساوي $\frac{1}{2}\mu\upsilon^2$ حيـــث أن μ الكتلـــة المختزلـــة وأن υ السرعة النسبية بين الجسيمين. اعتبر السُرع واطئة نسبة لسرعة الضوء.

2- جسيم كتلته الساكنة m_0 وسرعته باتجاه الاحداثي x تساوي 0.6c. اصطدم بجسيم آخر مماثل له كان يسير باتجاه الاحداثي x أيضاً وبسرعة 0.8c –. فإذا كان التصادم مباشراً وتام المرونة استخدم المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة لحساب سرعة كل منهما قبل التصادم فـــي محـــاور مركـــز الكتلة. ما كتلة كل منهما في محاور مركز الكتلة قبل التصادم؟

ج: (V1=-V2=0.71c)

$(M_1=M_2=1.43\ m_0)$

3- جسيم كتلته الساكنة m_1 وسرعته υ يصطدم بجسيم في حالة سكون كتلتـــه الساكنة m_2 فتحصل عملية امتصاص نتيجة التصادم وتتكون كتلة مشتركة. مستعيناً بمحاور الإسناد جد كتلة السكون للجسيم المتولـــد وســـرعته بعـــد عملية الامتصاص.

ج: $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{1-\upsilon^2/c^2}$

$$V = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2\sqrt{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}}$$

4- فوتون طاقته $h\nu$ اصطدم مع إلكترون ساكن فكانت طاقة الفوتـــون بعـــد التصادم مساوية إلى $h\nu/2$ فإذا سار هذا الفوتون باتجـــاه يصـــنع زاويـــة مقدارها 60° مع اتجاهه الأصلي جد مقدار التردد ν. ما نوع هذا الفوتون؟

ج: $\nu = 2.45\times10^{20}$ Hz

أشعة كاما

5- بوزيترون كان يسير بسرعة $\frac{4c}{5}$ اصطدم مع إلكترون في حالة سكون فتولد فوتونان شوهدا يتحركان باتجاهين متعاكسين في خط منطبق على مسار الجسيم الساقط. فإذا علمت أن m_0 الكتلة الساكنة لكل من الإلكترون و البوزيترون، جد طاقة كل من الفوتونين المتحررين.

ج: $2m_0c^2$
$\frac{2}{3}m_0c^2$

6- جسيمان b, a في محور الإسناد s زخم كل منهما $\vec{p}$ والكتلة الساكنة لكل منهما m_0 يتحرك الجسيم a في خط مستقيم باتجاه الاحداثي x الموجب ليصطدم بالجسيم b الذي يتحرك نحوه في خط مستقيم آخر يصنع زاوية مقدارها θ مع الاحداثي x. اثبت أن طاقة الجسيم b في محور الإسناد `s الذي يظهر فيه الجسيم a في حالة سكون تساوي

$$\mathcal{E}'_b = m_0c^2\left(1+\frac{2p^2}{m_0^2c^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

7- إذا كانت الزاوية التي يصنعها الفوتون المتشتت مع الفوتون الساقط تساوي 90° استنتج أولاً: أن الزاوية التي يصنعها الإلكترون مع اتجاه الفوتون الساقط تساوي: $\cot\theta = 1+\frac{h\nu}{m_0c^2}$، ثانياً: أن الطاقة الحركية للإلكترون المتشتت يعبر عنها بالعلاقة:

$$\mathcal{E} = h\nu\left(\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{h\nu}{m_0c^2}}\right)$$

8- إذا فرض أن φ هي زاوية انحراف الإلكترون عن اتجاه الفوتون الساقط الذي طاقته hν في تصادم من نوع كومبتن فاثبت أن طاقة الإلكترون الحركية T يمكن أن تعطى بموجب العلاقة الآتية:

$$T = h\nu \frac{2\alpha \cos^2 \varphi}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2 \varphi}$$

حيث أن: $\alpha = \dfrac{h\nu}{m_0 c^2}$.

9- استخدم معجل لتعجيل بروتونات إلى طاقة حركية عالية مقدارها 200GeV. فإذا علمت أن طاقة السكون للبروتون تساوي 0.938GeV احسب أعلى قيمة لطاقة السكون M_0c^2 لجسيم x يمكن توليده نتيجة تصادم أحد هذه البروتونات عالية الطاقة مع بروتون في حالة سكون حسب عملية التفاعل الآتية: $p + p \rightarrow p + p + x$

إذ أن: p يرمز للبروتون.

ج: $M_0c^2 = 17.58\text{GeV}$

10 – جسيم أشعة كونية كتلته M_0 يتحرك بسرعة $\frac{3c}{5}$ نسبة لمشاهد ساكن. لوحظ من قبل هذا المشاهد أن الجسيم بعدها حرر أشعة جاما (فوتونات)، طاقة الفوتون الواحد منها M_0c^2 باتجاه زاوية 60° مع خط حركة الجسيم. استنتج أن كتلة السكون للجسيم اختزلت $\frac{3}{4}M_0$ بعد عملية الإشعاع ثم جد زاوية انحراف سرعته الجديدة ومقدارها.

ج: $\upsilon = \frac{\sqrt{7}c}{4}$

11- جسيم كتلته الساكنة m_0 وطاقته الحركية $2m_0c^2$ اصطدم بجســيم آخــر ساكن كتلته الساكنة $2m_0$ فالتصق به. جد الكتلة الساكنة للجســيم الجديــد مفترضاً أن التصادم مرن وتام.

ج: $M_0 = \sqrt{17}\, m_0$

الفصل الرابع
(الفضاء ذو الأبعاد الأربعة والمتجهات الرباعية)

1.4 المتجه الرباعي.
2.4 تحويلات لورنس واستخدام المصفوفات.
3.4 تحويلات السرعة والمتجه الرباعي للسرعة.
4.4 المتجه الرباعي للزخم وللقوة.
5.4 تحويل الموجات الكهرومغناطيسية .
6.4 تأثير دوبلر.
7.4 انعكاس الضوء من سطوح متحركة .
أمثلة محلولة.
تمارين الفصل الرابع

الفضاء ذو الأبعاد الأربعة
والمتجهات الرباعية

4-1 المتجه الرباعي.

أي حدث مثل انبعاث إشارة ضوئية يمكن أن يوصف بموضعه (x,y,z) وبالزمن t حيث وقع الحدث. هذه المتغيرات الأربعة يمكن توحيدها بتعبير واحد أو علاقة منفردة تبقى دون تغيير فيما يخص تحويلات لورنس، أي أنها لا تتغير بالنسبة لجميع محاور الإسناد. إن هذا النوع من التعبير يصبح مفيداً إذا ما أردنا معرفة كميات أخرى مماثلة في الميكانيك أو في مواضيع الالكتروداينمك.

لنرجع مرة أخرى إلى تحويلات غاليليو فنلاحظ أن المسافة r^2 بين نقطتين (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) تبقى دون تغيير بالنسبة لمحاور الإسناد أي أن:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 \end{aligned}$$

فإذا كانت النقطة (1) مثبتة في محور الإسناد s والنقطة (2) مثبتة في محور الإسناد `s تصبح r دالة للزمن، فنقول عندئذ أن r تبقى دون تغيير لأن تحديدها يتم بدقة تحت التعبير نفسه في كلا محوري الإسناد. من الممكن أن نبين الآن وبسهولة أن r لا تكون لها القيمة نفسها أي أنها تتغير بالنسبة لتحويلات لورنس.

لنتصور وميضاً ضوئياً انبعث من مصدر نقطي من نقطة الأصل o في اللحظة التي كانت فيها `o منطبقة على o كما في الشكل (1–6). إن الضوء ينتقل من جميع الجهات وبسرعة c لكلا المحورين s و `s وعليه يكون:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{t^2}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{t'^2}=c^2 \qquad (4\text{-}1)$$

يصل الضوء إلى النقطة (x,y,z) في زمن t ويصل إلى النقطة (`x`,y`,z) في زمن `t فيكون لدينا:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

وبصورة عامة نرى أن الإحداثيات (x,y,z) و (`x`,y`,z) لأي حدث منفرد ترتبط مع بعضها بعلاقة واحدة هي:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

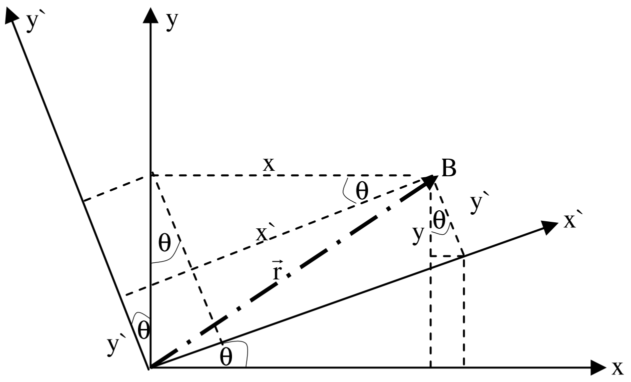
أو:

$$r^2-c^2t^2=r'^2-c^2t'^2 \qquad (2\text{-}4)$$

فالكمية $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ تبقى إذن دون تغيير تحت تحويلات لورنس. إن هذه الخاصية في الارتباط بين الإحداثيات الأربعة (x,y,z,t) تخضع بصورة مباشرة إلى هذا النوع من التحويلات.

وعليه فان أية مجموعة تتألف من أربع كميات تتحول بالطريقة نفسها التي تتحول بها الكميات (x,y,z,t) تظهر كمية مطابقة تبقى دون تغيير. إن مثل هذه الزمرة أو المجموعة المكونة من كميات أربع يطلق عليها المتجه الرباعي.

قبل أن نبدأ بدراسة التمثيل الهندسي لتحويلات لورنس واستخدام المتجهات الرباعية علينا أن نعرف أولاً ماذا يحدث لمتجه الموضع $\vec{r}$ ومقداره r عندما تدور مجموعة من الإحداثيات (x,y,z) حول إحداثي معين هو z بزاوية مقدارها θ لتتحول إلى مجموعة أخرى من الإحداثيات (`x`,y`,z).



الشكل (4 – 1): تحويل في ثلاثة أبعاد يسمى بالتحويل التعامدي،
زاوية الدوران θ هي زاوية حقيقية.

إن تحويل الإحداثيات بواسطة هذا النوع من الدوران يوصف بالمعادلات الآتية، لاحظ الشكل (4 – 1):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}4)$$

إن هذا التحويل الذي يبين عملية دوران الإحداثيات حول المحور z بزاوية θ حيث تحول الإحداثيات x,y إلى x`,y` يُبقي مقدار المتجه $\vec{r}$ دون تغيير إذ من الممكن أن نحصل من المعادلات (4 – 3) على العلاقة الآتية:

$$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$$

المعادلات (4 – 3) هي مثال لعملية تحويل في ثلاثة أبعاد يطلق عليه التحويل التعامدي. وهو تحويل حقيقي يترك مقدار المتجه $\vec{r}$ دون تغيير. ومن الممكن استخدام هذه الطريقة لتشمل أبعاداً أربعة إذا اعتبرنا الكمية $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ تمثل مربع بعد في إحداثيات الفضاء والزمن. وعليه تعرف الإحداثيات الأربعة هذه كالآتي:

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , \quad x_4 = ict$$

حيث أن $i = \sqrt{-1}$. تكتب الكمية إذن على النحو الآتي:

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \qquad (4\text{-}4)$$

وهذه الكمية تبقى دون تغيير بالنسبة لتحويلات لورنس تحت شروط معينة. وتجدر الإشارة في هذا المجال إلى أن الفضاء ذا الأبعاد الأربعة يُسمى كذلك فضاء "**منكوسكي**" نسبة إلى العالم منكوسكي الذي أوجد مخططاً لهذا الفضاء وقام بدراسته بصورة تفصيلية. في هذا الفضاء تعامل تحويلات لورنس على أنها تحويل تعامدي والكمية المحددة بالإحداثيات (x_1,x_2,x_3,x_4) هي مركبات لمتجه رباعي في الفضاء ذي الأبعاد الأربعة.

4 – 2 تحويلات لورنس واستخدام المصفوفات:

ينبغي علينا قبل كل شيء مناقشة التحويل التعامدي في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة ثم نطبق نتائج هذا النوع من التحويل ليشمل الفضاء ذا الأبعاد الأربعة وذلك بأن يضاف الإحداثي الرابع x_4.

يكون التحويل خطياً لمجموعة من الإحداثيات إذا أمكن التعبير عنها بالإحداثيات الأصلية على النحو التالي:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

أو:

$$x_i' = \sum_j a_{ij}x_j \quad \text{حيث:} \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix} \qquad (5\text{-}4)$$

وهذا التحويل يسمى بالتحويل الخطي وأن a_{ij} تمثل مجموعة من المعاملات التي توصف هذا التحويل. ويصبح هذا التحويل تعامدياً إذا بقي مقدار المتجه $\sum x_i^2$ دون تغيير. فإذا فرض أن المعادلة الأخيرة تمثل تحويلاً تعامدياً يكون:

$$\sum_i x_i'^2 = \sum_k x_k^2 \qquad (6\text{-}4)$$

و بما أن:

$$(x'_j)^2 = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} x_j x_k$$

$$\therefore \sum_i (x'_i)^2 = \sum_j \sum_k \sum_i a_{ij} a_{ik} x_j x_k \qquad (7\text{-}4)$$

وتتساوى العلاقتان (4−6) و (4−7) عندما يكون:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & j \neq k \\ 1 \Rightarrow & j = k \end{cases}$$

$$\therefore \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (8\text{-}4)$$

ولجعل التحويل آنف الذكر تحويلاً تعامدياً ينبغي أن تتحقق العلاقة (4 − 8) ومن الممكن إثبات أن التحويل الممثل بالمعادلة (4 – 3) خاضع للشرط أعلاه.

إن التحويل الذي تعطيه العلاقة (4 − 5) يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$X' = AX \qquad (9\text{-}4)$$

حيث أن `X تمثل متجه الموضع المحول مع مركباته (x'_1, x'_2, x'_3) وأن X متجه الموضع الأصلي مع مركباته (x_1, x_2, x_3) وأن A تمثل مصفوفة التحويل بعناصرها a_{ij} وتكتب:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (10\text{-}4)$$

وإذا مثلنا المتجهين `X,X كمصفوفتين بعمود واحد يمكننا أن نكتب:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (11\text{-}4)$$

و a_{ij} هي مصفوفة الدوران الخاصة بهذا التحويل. وكما ذكرنا سابقاً أن طريقة التحويل هذه باستخدام المصفوفات يمكن تطبيقها بالنسبة للفضاء ذي الأبعاد الأربعة.

لنفرض أن ℓ طول متجه في هذا الفضاء مربعه $\ell^2 = \vec{\ell}.\vec{\ell}$

يمكن أن يكتب:

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

والخاصية الأساسية لتحويلات لورنس أن ℓ يُترك دون تغيير تحت تحويلات لورنس أي أن:

$$\sum_{\mu} x_{\mu}'^{2} = \sum_{\lambda} x_{\lambda}^{2}$$

من الممكن الآن كتابة معادلات لورنس على النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 + (0)x_2 + (0)x_3 + i\beta\gamma x_4 \\ x_2' &= (0)x_1 + (1)x_2 + (0)x_3 + (0)x_4 \\ x_3' &= (0)x_1 + (0)x_2 + (1)x_3 + (0)x_4 \\ x_4' &= -i\beta\gamma x_1 + (0)x_2 + (0)x_3 + \gamma x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}4)$$

حيث أن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$ وأن $\beta = \frac{\upsilon}{c}$، υ السرعة النسبية بين محوري الإسناد s`,s.

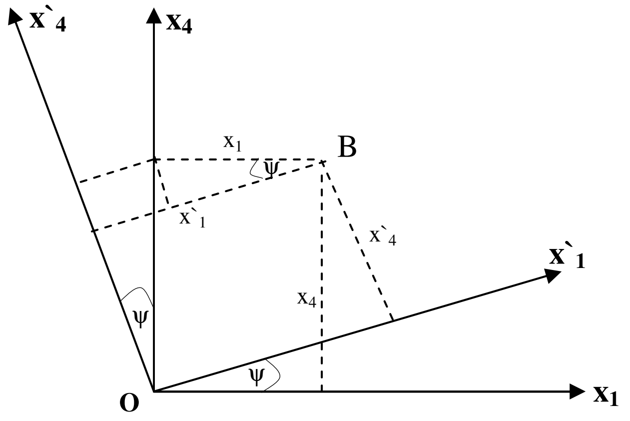
ويمكن التعبير عن تحويلات لورنس بصيغة المصفوفة بالشكل:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad (13\text{-}4)$$

إن مصفوفة التحويل المبينة بالعلاقــة (4 – 13) هــي تحويــل تعامــدي أي أن عناصرها تخضع للعلاقة (4 – 8). وهي سهلة التعامل لأن لها ستة عناصر غيــر صفرية ذلك لان تحويلات لورنس تربط ما بين محوري إسناد بينهما حركة نسبية باتجاه المحور x. وهكذا نجد أن x و t يتحولان إلى `x و `t بينما الاتجاهان y و z لا يتأثران بهذا التحويل.

إن تحويل لورنس الممثل بالمعادلة (4 – 12) يمكن أن يفسر كـــدوران فـــي المستوى x_1x_4. وفي هذه الحالة فإن زاوية الدوران ψ يمكن تحديدها من معادلتي التحويل الآتيتين:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\psi + x_4 \sin\psi \\ x'_4 &= -x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}4)$$



الشكل (4 – 2): تحويل في أربعة أبعاد. زاوية الدوران ψ هي زاوية خيالية.

وبمقارنة العلاقة (4 – 14) بالعلاقة (4 – 12) يتضح لدينا أن:

$$\tan\psi = i\beta = i(\upsilon/c) \qquad (15\text{-}4)$$

وهكذا نستنتج أن زاوية الدوران ليست زاوية حقيقية، رياضياً نقـــول أن تحويـــل لورنس يعتبر دوراناً في فضاء تعامدي ذي أبعاد أربعـــة، إلا أنـــه دوران خـــلال زاوية خيالية. من العلاقة (4 – 15) ومعادلات التحويل نستنتج أن:

$$\cos\psi = \gamma \quad , \quad \sin\psi = i\beta\gamma$$

إذن يمكننا كتابة مصفوفة التحويل على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \qquad (16\text{-}4)$$

من أهم فوائد المصفوفات في النسبية معالجة التراكيب المتعلقة بتحويلات لورنس إذ تسهل العمليات بواسطة ضرب المصفوفات.

نستنتج مما تقدم أن المتجه الرباعي بصورة عامة يمكن تعريفه بأنه مجموعة لأربع كميات، وإذا كان المتجه هو $\vec{A}$ فالكميات الأربع هي (A_μ)، حيث $\mu=1,2,3,4$، وهذه الكميات الأربع تتحول بالطريقة نفسها التي تتحول فيها الإحداثيات x_μ بالنسبة لتحويلات لورنس. وهكذا تكتب معادلة التحويل الآتية:

$$A'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu \qquad (17\text{-}4)$$

حيث أن:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad (18\text{-}4)$$

4 – 3 تحويلات السرعة والمتجه الرباعي للسرعة .

لنفرض أن جسيماً يتحرك في الفضاء ذي الأبعاد الأربعة. الخط الذي يتخذه الجسيم خلال حركته يسمى بالخط العالمي ويمكن تحديده في محور إسناد معين بالإحداثيات x_μ التي كما لاحظنا تتحول كمتجه رباعي. ووفقاً لذلك فإن الفرق Δx_μ بين نقطتين على هذا الخط هو متجه رباعي أيضاً إلا أن النسبة $\frac{\Delta x_\mu}{\Delta t}$ ليست متجهاً رباعياً لأن الفترة الزمنية Δt تأخذ قيماً مختلفة في محاور إسناد مختلفة.

سنحاول الآن إيجاد فترة زمنية أخرى $\Delta\tau$ تسمى بالفترة الزمنية المناسبة بين حدثين و التي تبقى دون تغيير بالنسبة لجميع محاور الإسناد. وللحصول على هذه الفترة نتبع الطريقة الآتية:

من العلاقة (4 – 2) نكتب:

$$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta z)^2=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-c^2(\Delta t')^2$$

$$(\Delta r)^2-c^2(\Delta t)^2=(\Delta r')^2-c^2(\Delta t')^2$$

$$\therefore\ \Delta t\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2\right]^{1/2}=\Delta t'\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta r'}{\Delta t'}\right)^2\right]^{1/2}$$

ووفقاً لذلك تكون الفترة الزمنية المناسبة هي:

$$\Delta\tau=\Delta t\left(1-u^2/c^2\right)^{1/2}=\Delta t'\left(1-u'^2/c^2\right)^{1/2} \qquad (19\text{-}4)$$

يلاحظ من العلاقة الأخيرة أن $\Delta\tau$ تبقى دون تغيير. وأن u و `u سرعتا الجسيم في محور الإسناد s و `s على التوالي:

إذا كان المتجه الرباعي للسرعة يحدد بالكميات الأربع V_μ، $\mu=1,2,3,4$ فان:

$$\sum_\mu V_\mu^2=\sum_\lambda V_\lambda'^2 \qquad (20\text{-}4)$$

حيث أن:

$$V_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau} \qquad (21\text{-}4)$$

وهذا المتجه يتحول بالطريقة نفسها التي يتحول فيها المتجه الممثل بمركباتـــه x_μ. ولذلك فهو متجه رباعي ونسميه بالسرعة الرباعية أو المتجه الرباعي للســـرعة. ومركبات هذه السرعة تحسب كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= \frac{dx_1}{d\tau} = \left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} \\
V_2 &= \frac{dx_2}{d\tau} = \left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}\frac{dy}{dt} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} \\
V_3 &= \frac{dx_3}{d\tau} = \left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}\frac{dz}{dt} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} \\
V_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = \left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}\left(\frac{d\left(\iota ct\right)}{dt}\right) = \frac{ic}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}
\end{aligned}\right\} \qquad (22\text{-}4)$$

وبتربيع طرفي كل معادلة من هذه المعادلات ثُم إجراء عملية الجمع ينتج أن:

$$\sum_{\mu} V_{\mu}^2 = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)}{\left(1-u^2/c^2\right)} - \frac{c^2}{\left(1-u^2/c^2\right)} = \frac{u^2-c^2}{1-u^2/c^2}$$

$$\therefore \sum_{\mu} V_{\mu}^2 = -c^2 \qquad (23\text{-}4)$$

ولما كانت السرعة الرباعية تتحول كمتجه رباعي فيمكننا كتابة العلاقة:

$$\sum_{\mu} V'_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\mu v} V_v$$

وبالاستعانة بالمصفوفة $a_{\mu v}$ المكتوبة عناصرها في العلاقة (4 – 18) تكون لــدينا معادلات التحويل الآتية الخاصة بمركبات السرعة الرباعية:

$$\left.\begin{aligned}
v'_1 &= \gamma\left(v_1 + i\beta v_4\right) \\
v'_2 &= v_2 \\
v'_3 &= v_3 \\
v'_4 &= \gamma\left(-i\beta v_1 + v_4\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (24\text{-}4)$$

المعادلات (4 – 22) يمكن كتابتها بصورة مختصرة على النحو التالي:

$$v_{\mu} = \left\{\frac{\vec{u}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}, \frac{ic}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}\right\} \qquad (25\text{-}4)$$

حيث تمثل $\vec{u}$ متجه السرعة للجسيم في الفضاء الاعتيادي.

4 – 4 المتجه الرباعي للزخم وللقوة.

أولاً: المتجه الرباعي للزخم.

يعرف الزخم الرباعي بالعلاقة:

$$p_\mu = m_0 v_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} = m \frac{dx_\mu}{dt} \qquad (26\text{-}4)$$

حيث أن V_μ السرعة الرباعية وأن m_0 الكتلة الساكنة للجسيم. تكتب مركبات هذا المتجه كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= m_0 \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} = m\dot{x} \\
p_2 &= m_0 \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} = m\dot{y} \\
p_3 &= m_0 \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} = m\dot{z} \\
p_4 &= m_0 \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{m_0 ic}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} = icm = \frac{i\mathcal{E}}{c}
\end{aligned}\right\} \qquad (27\text{-}4)$$

نلاحظ من المعادلات أعلاه أن مركبات الزخم الاعتيادي تشــبه تمامــاً مركبــات المتجه الرباعي للزخم في الفضاء ذي الأبعاد الأربعة ولكن تستعمل هنــا الكتلــة النسبية بدلاً من كتلة السكون.

المتجه الرباعي للزخم يبقى دون تغيير كما يجب أن يكون لأن:

$$\sum_\mu p_\mu^2 = m^2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - m^2c^2$$

$$= m^2u^2 - m^2c^2 = \frac{m_0{}^2\left(u^2 - c^2\right)}{\left(1-u^2/c^2\right)}$$

$$\therefore \sum_\mu p_\mu^2 = -m_0{}^2c^2 \qquad (28\text{-}4)$$

وبما أن هذه الكمية تبقى دون تغيير نكتب:

$$\sum_{\mu} p_{\mu}^{2} = \sum_{\lambda} p_{\lambda}'^{2} = -m_0{}^2c^2 \qquad (29\text{-}4)$$

و لما كان الزخم الرباعي يتحول كمتجه رباعي فيمكننا كتابة العلاقة:

$$\sum_{\mu} p_{\mu}' = \sum_{\lambda} a_{\mu\nu} p_{\nu} \qquad (30\text{-}4)$$

وهكذا تصبح لدينا معادلات التحويل الخاصة بمركبات المتجه الرباعي للزخم:

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= \gamma(p_1 + i\beta\, p_4) \\ p_2' &= p_2 \\ p_3' &= p_3 \\ p_4' &= \gamma(-i\beta\, p_1 + p_4) \end{aligned}\right\} \qquad (31\text{-}4)$$

المعادلات(4–27) تكتب بصورة مختصرة على النحو التالي:

$$p_{\mu} = \left(\vec{p}\,,\frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$$

حيث يمثل $\vec{p}$ متجه الزخم في الفضاء الاعتيادي ومركباته p_3, p_2, p_1 أما المركبة الرابعة فهي $p_4 = \frac{i\mathcal{E}}{c}$.

من العلاقة (4 – 28) يكون واضحاً أن الطاقة الكلية $\mathcal{E}$ يمكن أن يعبر عنها بدلالة الزخم كالآتي:

$$\sum_{\mu} p_{\mu}{}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m_0^2c^2$$

$$\therefore \mathcal{E} = \sqrt{\left(c^2p^2 + m_0^2c^4\right)} \qquad (32\text{-}4)$$

ومن الواضح أيضاً من المعادلات (4–31) أن معادلة التحويل الخاصة بالطاقة من محور الإسناد s إلى `s يمكن الحصول عليها من العلاقة الرابعة أي:

$$p_4' = \gamma(-i\beta p_1 + p_4)$$

$$\therefore i\frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma\left(i\frac{\mathcal{E}}{c} - i\frac{\upsilon}{c}p_x\right)$$

حيث أن: $p_1 = p_x$

$$\therefore \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \upsilon p_x)$$

وعلينا أن نذكر أن المتجهات الرباعية وضربها مع بعض تبقى دون تغيير تحت تحويلات لورنس ويمكن أن تستخدم لحل مسائل كثيرة.

لنراجع الآن المثال المتعلق بتصادم جسيمين، بفرض أن طاقة وزخم الجسيم الأول $\vec{p}_1, \mathcal{E}_1$ وطاقة وزخم الجسيم الثاني $\vec{p}_2, \mathcal{E}_2$. كتلتا سكونهما m_{02}, m_{01} على التوالي. بعد التصادم تكون طاقة وزخم الجسيم الأول $\vec{p}_3, \mathcal{E}_3$ وللجسيم الثاني $\vec{p}_4, \mathcal{E}_4$. وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والزخم خلال عملية التصادم المرن من الممكن استخدام المتجهات الرباعية للزخم كالآتي:

$$p_{1\mu} + p_{2\mu} = p_{3\mu} + p_{4\mu} \qquad (33\text{-}4)$$

حيث أن:

$$p_{1\mu} = \left(\vec{p}_1, \frac{i\varepsilon_1}{c}\right) \quad , \quad p_{2\mu} = \left(\vec{p}_2, \frac{i\varepsilon_2}{c}\right)$$
$$p_{3\mu} = \left(\vec{p}_3, \frac{i\varepsilon_3}{c}\right) \quad , \quad p_{4\mu} = \left(\vec{p}_4, \frac{i\varepsilon_4}{c}\right)$$

ومن هذه المعادلات نكّون علاقات تبقى دون تغيير تساعد في إجراء الحسابات المتعلقة بهذه المسألة. ولتوضيح ذلك نعيد كتابة المعادلة (4–33) بالشكل.

$$p_{1\mu} + p_{2\mu} - p_{3\mu} = p_{4\mu}$$

وبتربيع طرفي هذه المعادلة يكون لدينا: [لاحظ العلاقة (4 – 28)]

$$-m_{01}^2c^2 - m_{02}^2c^2 - m_{01}^2c^2 + 2p_{1\mu}p_{2\mu} - 2p_{1\mu}p_{3\mu} - 2p_{2\mu}p_{3\mu} = -m_{02}^2c^2$$
$$\therefore\ m_{01}c^2 + p_{1\mu}p_{3\mu} + p_{2\mu}p_{3\mu} - p_{1\mu}p_{2\mu} = 0 \qquad (34\text{-}4)$$

لنعتبر التصادم قد حصل في محور الإسناد s حيث يلاحظ فيه الجسيم الثاني في حالة سكون قبل التصادم، فيصبح لدينا الآن:

$$\varepsilon_2 = m_{02}c^2 \quad , \quad \vec{p}_2 = 0$$

وحاصل الضرب العددي الممثل بالحدود المبينة في المعادلة (4 – 34) يساوي:

$$\left.\begin{aligned} p_{1\mu}p_{3\mu} &= \vec{p}_1.\vec{p}_3 - \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3}{c^2} = p_1p_3\cos\theta - \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3}{c^2} \\ p_{2\mu}p_{3\mu} &= -\mathcal{E}_3 m_{02} \\ p_{1\mu}p_{2\mu} &= -\mathcal{E}_1 m_{02} \end{aligned}\right\} \qquad (35\text{-}4)$$

حيث أن θ زاوية التشتت للجسيم الساقط (الأول) بعد التصـــادم وبتعـــويض هـــذه العلاقات في المعادلة (4 – 34) ينتج:

$$\cos\theta = \frac{\mathcal{E}_3\left(\dfrac{\mathcal{E}_1}{c^2} + m_{02}\right) - \mathcal{E}_1\, m_{02} - m_{01}^2 c^2}{p_1 p_3} \qquad (36\text{-}4)$$

والعلاقة الأخيرة تعطي زاوية التشتت بدلالة طاقة الجسيمين في حالة التصادم.

و بإتباع الطريقة نفسها نستطيع أن نكتب علاقة مشابهة فيما يتعلق بزاويـــة التشتت φ للجسيم الثاني.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\dfrac{\mathcal{E}_1}{c^2} + m_{02}\right)\left(\mathcal{E}_4 - m_{02}c^2\right)}{p_1 p_4} \qquad (37\text{-}4)$$

ثانياً: المتجه الرباعي للقوة:

لندخل متجها رباعياً جديداً F_μ يُسمى بالقوة الرباعيـــة أو المتجـــه الربـــاعي للقوة. عندئذ يكون التعميم النسبي لقانون نيوتن الثاني:

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} \qquad (38\text{-}4)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل التالي:

$$F_\mu = \left(1 - u^2/c^2\right)^{-1/2} \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx_\mu}{dt}\right) \qquad (39\text{-}4)$$

حيث أن $\vec{u}$ سرعة الجسيم، m الكتلة النسبية. إذن المركبات الثلاث الأولى للقــوة الرباعية تنسب إلى القوة الاعتيادية f وتكتب:

$$F_1 = \frac{f_x}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \quad , \quad F_2 = \frac{f_y}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \quad , \quad F_3 = \frac{f_z}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}}$$

وكذلك بالنسبة للمركبة الرابعة لدينا:

$$F_4 = \frac{ic}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \frac{dm}{dt} = \frac{i}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \qquad (40\text{-}4)$$

إذن تنسب F_4 إلي المعدل الزمني الذي تتغير فيه كتلة الجسيم أو الكتلة والطاقــة.

والآن بما أن المتجه الرباعي للزخم يبقى دون تغيير أي أن:

$$\sum_{\mu} p_{\mu}^2 = -m_0^2 c^2$$

يحصل أن:

$$\sum_{\mu} p_{\mu} \frac{dp_{\mu}}{d\tau} = 0$$

$$\sum_{\mu} p_{\mu} F_{\mu} = 0 \qquad (41\text{-}4)$$

ويمكن تفسير ذلك كصيغة تعامد بين P_{μ} و F_{μ}. وعند كتابــة المعادلــة (4 – 41) بصيغة المركبات و جعل إشارة المقدار P_4F_4 سالبة ينتج:

$$P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3 = -P_4F_4$$

وهذه تكافئ:

$$\frac{f_x}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}.mu_x + \frac{f_y}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}.mu_y + \frac{f_z}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} mu_z = \frac{-(icm)}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}} \frac{i}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{u}.\vec{f} \qquad (42\text{-}4)$$

إذن معدل التغير الزمني للكمية $\mathcal{E}=mc^2$ هو المعدل الذي تنجز فيه القوة الاعتيادية $\vec{f}$ شغلاً على الجسيم. وهو يتفق مع ما ذُكر عن العلاقة بين الكتلة والطاقة. وبما أن القوة الرباعية تتحول كمتجه رباعي يمكننا كتابة معادلات التحويل الخاصة بالقوة.

$$\left.\begin{aligned} F_1' &= \gamma\left(F_1 + i\beta F_4\right) \\ F_2' &= F_2 \\ F_3' &= F_3 \\ F_4' &= \gamma\left(F_4 - i\beta F_1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (43\text{-}4)$$

ونوضح الآن كيفية استخدام المعادلة الرابعة من (4 – 43) للحصول على معادلة تحويل الطاقة.

$$\because\ F_4' = \gamma\left(F_4 - i\frac{\upsilon}{c}F_1\right)$$

$$\therefore \frac{i}{c}\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = \gamma\left[\frac{i}{c}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} - i\beta\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{dp_x}{dt}\right]$$

$$\because \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{+1/2} dt' = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{+1/2} dt = d\tau$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}'}{d\tau} = \gamma\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} - \upsilon\frac{dp_x}{d\tau}\right)$$

$$\therefore\ \mathcal{E}' = \gamma\left(\mathcal{E} - \upsilon p_x\right)$$

4 – 5 تحويل الموجات الكهرومغناطيسية .

لقد بّينا في البند السابق أن الزخم الاعتيادي في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة $\vec{p}$ والطاقة الكلية $\mathcal{E}$ لجسيم يمكن توحيدهما ليكونا متجهاً رباعياً $\left(\vec{p}, \frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$. ووفقاً لفكرة تكميم الطاقة لبلانك فان الفوتون وتحت ظروف معينة* يسلك سلوك الجسيم ولقد بينا كيف يكون لهذا الفوتون زخم مساوٍ إلى: [راجع البند (3–4) من الفصل السابق]

$$\vec{p} = \vec{n}\,\frac{h\nu}{c}$$

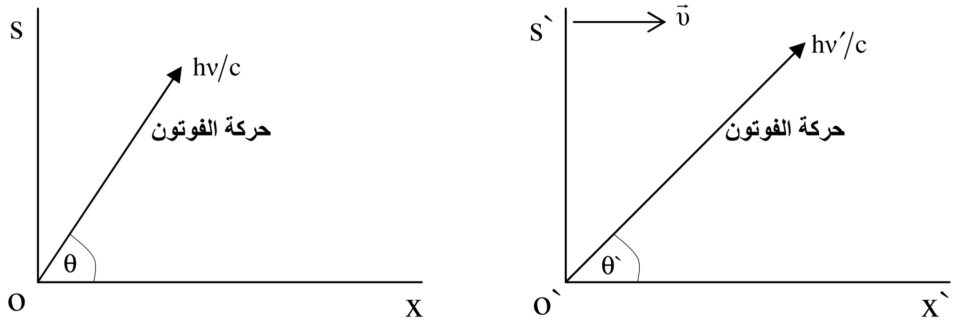
وطاقة مساوية إلى:

$$\mathcal{E} = h\nu$$

---

* وفقاً لفرضية آينشتاين يمتلك الفوتون صفات الازدواجية الموجية-الجسيمية عند الانتشار و الحيود و التداخل، فتظهر صفاته الموجية و تختفي الجسيمية. أما عند تفاعل الفوتون مع المادة كما هو الحال في الظاهرة الكهروضوئية و تأثير كمبتون فتظهر صفاته الجسيمية وتختفي الموجية.

حيث أن v التردد، h ثابت بلانك و $\vec{n}$ وحدة المتجه باتجاه حركة الفوتون.



الشكل (4 – 3): فوتون يتحرك باتجاه يصنع زاوية θ مع x في s. يتغير زمن الفوتون في `s ويصنع زاوية `θ مع `x.

و بالنسبة للفوتون يمكننا كتابة المتجه الرباعي $\left(\vec{p}, \frac{i\varepsilon}{c}\right)$ بالشكل $\left(\vec{n}\frac{h\nu}{c}, \frac{ih\nu}{c}\right)$.

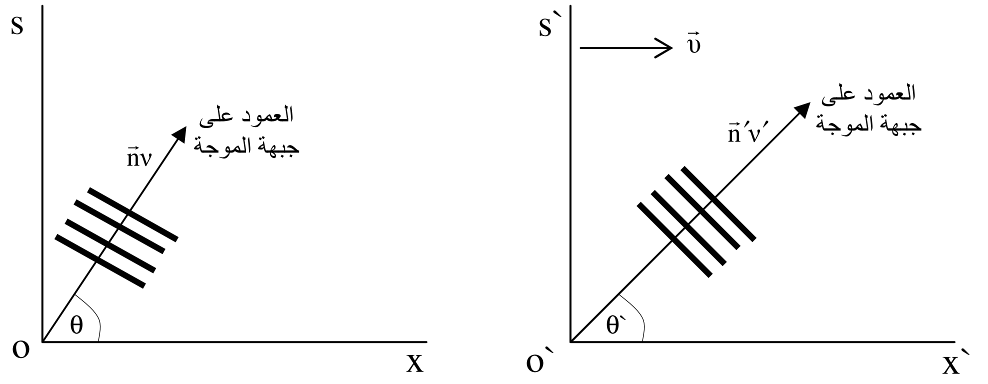
لنفرض الآن فوتوناً منفرداً يتحرك في المستوى x-y في محور الإسناد s وفي المستوى `x`-y في محور الإسناد `s بحيث يصنع اتجاه حركته الزاويتين θ,`θ مع الاحداثيين x,`x لمحوري الإسناد s,`s على التوالى كما في الشكل (4 – 3). وإذا كان $\vec{A}$ متجهاً رباعياً فان:

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \gamma\left(A_1 + i\frac{\upsilon}{c}A_4\right) \\ A_2' &= A_2 \\ A_3' &= A_3 \\ A_4' &= \gamma\left(A_4 - i\frac{\upsilon}{c}A_1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (44\text{-}4)$$

وبتطبيق هذه المعادلات على الزخم الرباعي للفوتون نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \nu'\cos\theta' &= \gamma\nu\left(\cos\theta - \frac{\upsilon}{c}\right) \\ \nu'\sin\theta' &= \nu\sin\theta \\ \nu' &= \gamma\nu\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\cos\theta\right) \end{aligned}\right\} \qquad (45\text{-}4)$$

إذا اعتبرنا الآن أن الضوء موجة كهرومغناطيسية تسير بالسرعة c في الفراغ وهي واحدة بالنسبة لجميع محاور الإسناد وأعتبرنا ν تردد هذه الموجة في محور الإسناد s اتجاهها يضع زاوية مقدارها θ مع الاحداثي x و أن `$\nu$ ترددها في محور الإسناد `s واتجاهها يصنع `$\theta$ مع الاحداثي `x لامكننا أن نثبت بأن المعادلات اعلاه التى توصلنا إليها بمساعدة المتجهات الرباعية هي معادلات تحويل الموجة المستوية من محور الإسناد s إلى محور الإسناد `s. وتبين معادلات التحويل هذه كيف أن اتجاه انتشار الموجة المستوية و التردد قد تم توحيدهما ليكونا متجهاً رباعياً هو $(\vec{n}\nu, i\,\nu)$ حيث أن $\vec{n}$ وحدة المتجه باتجاه انتشار الموجة المستوية وأن ν ترددها. لاحظ الشكل (4 – 4).



الشكل (4 – 4): موجة كهرومغناطيسية مستوية يصنع العمود علي جبهتها زاوية θ في s. ويصنع العمود علي جبهتها في `s الزاوية `θ.

إذا ضربنا الآن بالمقدار h/c يتحول المتجه الرباعي للموجة المستوية إلى الصيغة التالية $\left(\vec{n}\frac{h}{\lambda}, \frac{i\,h\nu}{c}\right)$. وهكذا نلاحظ بالنسبة للضوء أن الزخم و الطاقة

العائدين للفوتون يمكن توحيدهما ليكونا المتجه الرباعي $\left(\vec{p}, \frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$ كما أن الطول الموجي وتردد الموجة المستوية يمكن توحيدهما ليكونا متجهاً رباعياً بالصيغة $\left(\vec{n}\frac{h}{\lambda}, \frac{i\,h\nu}{c}\right)$.

لقد اقترح العالِم الفرنسي لويس ديبرولي سنة 1923، (أي بعد أكثر من عقدين من الزمن على ظهور فكرة تكميم الطاقة لبلانك) أنه اذا كان الاشعاع تحت بعض الظروف قد يسلك سلوكاً مزدوجاً، فانه من الممكن أفتراض أن المادة قد تسلك ايضاً سلوكاً مزدوجاً في ظروفٍ أخرى. لقد افترض ديبرولي ان الجسيمات المادية (الالكترونات)، تصحبها موجة (تعرف الان بموجة ديبرولي) و ان طول هذه الموجة المرافقة يتناسب مع الزخم بصورة مشابهة للفوتون. فان صّحت هذه الفرضية، فانه مقارنة مع الضوء نتوقع أن يتحد الزخم مع الطاقة ليكونا المتجه الرباعي للجسيم $\left(\vec{p}, \frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$ فيما يتحد الطول الموجي و التردد العائدين لموجة الجسيم، كما هو متوقع، ليكونا المتجه الرباعي للموجة $\left(\vec{n}\frac{h}{\lambda}, \frac{i\,h\nu}{c}\right)$، حيث أن $\vec{n}$ وحدة المتجه باتجاه انتشار الموجة المرافقة للجسيم.

اقترح ديبرولي كذلك بأنه قد تكون علاقة بلانك $\mathcal{E} = h\,\nu$ صحيحة و يمكن تطبيقها على الجسيمات، حيث ν هنا تردد الموجة المرافقة للجسيم و في هذه الحالة يمكن أن يكتب المتجه الرباعي للموجة المرافقة بالصيغة $\left(\vec{n}\frac{h}{\lambda}, \frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$ وبمقارنة المتجه الرباعي $\left(\vec{p}, \frac{i\mathcal{E}}{c}\right)$ يمكننا أن نتوقع ايضاً بأن الزخم يساوي:

$$\vec{p} = \vec{n}\,\frac{h}{\lambda}$$ أو

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \qquad (46\text{-}4)$$

وهي علاقة ديبرولي التي أُثبتت تجريبياً بعد اربع سنوات من اقتراحها، حيث قام العالمان دافيسون و جيرمر سنة 1927 بمشاهدة حيود الألكترونات عند سقوطها

على سطح بلورة من النيكل و التي بينا فيها ان الدليل القاطع على وجود الأمـــواج المصاحبة للالكترونات هو تحقيقها العملي لظاهرة الحيود.

- سرعة الطور υ_{ph} لموجات ديبرولي تساوي:

$$\upsilon_{ph} = \lambda \nu = \frac{h}{p} \cdot \frac{\mathcal{E}}{h} = \frac{\mathcal{E}}{p}$$

$$\therefore \upsilon_{ph} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} \Bigg/ \frac{m_0 u}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)}} = \frac{c^2}{u} \qquad (47\text{-}4)$$

- سرعة مجموعة الأمواج υ_g فهي تساوي:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d(h\nu)}{d\left(\frac{h}{\lambda}\right)} = \frac{d\mathcal{E}}{dp}$$

$$\because \mathcal{E} = c\left(p^2 + m^2{}_0 c^2\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\therefore \upsilon_g = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = u} \qquad (48\text{-}4)$$

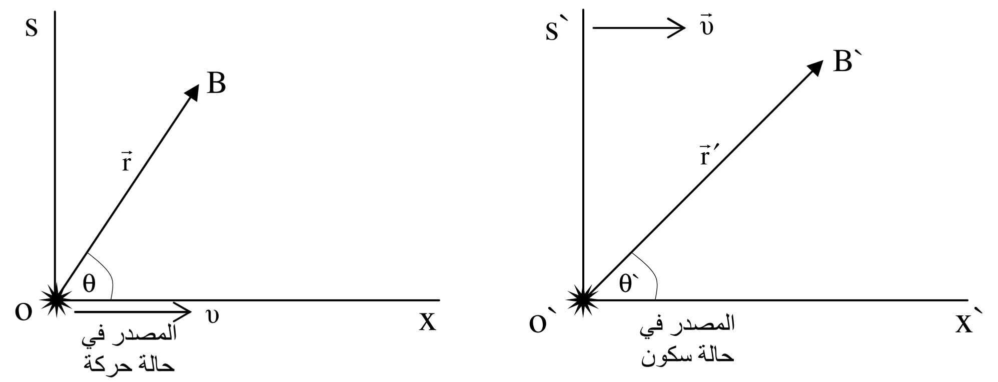
إذن سرعة المجموعة υ_g لموجات ديبرولي تساوي سرعة الجسيم u. لـــذلك فـــان فكرة تمثيل الجسيم المادي بموجة مرافقة (أو مجموعة من الأمواج) تسير بسرعته نفسها و تحمل صفاته* نفسها تبدو مقبولة علمياً.

4 – 6 تأثير دوبلر.

إن التجارب المهمة التي أجريت في الفيزياء الذرية كان بعضـــها يتضـــمن دراسة عن الأشعاعات المنبعثة من ذرات أو نوى في حالة حركـــة. فلـــوحظ أن التردد الظاهري لهذه الاشعاعات يعتمد علـــى الحركـــة النســـبية بـــين المصـــدر والمشاهد.

---

* تتحدد الصفات الجسيمية بالطاقة ε و الزخم p، أما الصفات الموجية فتتحدد بالتردد ν و الطول الموجي λ. و يربط ثابت بلانك h بين الصفات الجسيمية و الموجية أي بين الطاقة و التردد بالعلاقة $\varepsilon = h\nu$ و كذلك بين الزخم و الطول الموجي بالعلاقة $p = h/\lambda$.



الشكل (4 – 5): المصدر متحرك في s. زمن وصول الإشارة إلى B هو t و زمن انبعاثها في o هو (t-r/c) وهو الزمن المتأخر. في `s يكون المصدر ساكناً لا يغير موقعه خلال الزمن r`/c.

لنعتبر مصدراً ضوءياً نقطياً في حالة سكون في نقطة الأصل `o في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الاحداثي `x كما هو ملاحظ في الشكل (4 – 5). في محور الإسناد s يكون المصدر الضوئي في حالة حركة بسرعة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الاحداثي x. لنفرض الآن أن الضوء انبعث في اللحظة التي كانت فيها نقطة الأصل o منطبقة على `o في زمن t=t`=0. ولنفرض أن الضوء وصل المشاهد عند النقطة B في حالة سكون في محور الإسناد s في زمن t ووصل النقطة `B في `s في زمن `t كما هو ملاحظ في الشكل(4 – 5). يعبر عن الموجة الكروية:

- في محور الإسناد s بالصيغة:

$$\psi = \frac{A}{r}\cos 2\pi\nu\left(t - r/c\right)$$

- في محور الإسناد `s بالصيغة:

$$\psi = \frac{A'}{r'}\cos 2\pi\nu'\left(t' - r'/c\right)$$

وبإتباع الطريقة نفسها في تحويل الموجات الكروية والمستوية من محور الإسناد s إلى `s، [لاحظ العلاقة (4 – 45)]، يمكننا كتابة معادلات التحويل الخاصة بالتردد ν و `ν كالآتي:

$$\nu' = \gamma\nu\left(1-\beta\cos\theta\right)$$
$$\nu'\sin\theta' = \nu\sin\theta$$
$$\nu'\cos\theta' = \gamma\nu\left(\cos\theta-\beta\right)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على الأولى نحصل على:

$$\sin\,\theta' = \frac{\sin\theta\big/\gamma}{1-\beta\cos\,\theta} \qquad (49\text{-}4)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على الثالثة نحصل على:

$$\tan\,\theta' = \frac{\sin\theta\big/\gamma}{\cos\,\theta-\beta} \qquad (50\text{-}4)$$

حيث أن θ الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{r}$ مع اتجاه حركة المصدر في محور الإسناد s وان θ' الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{r}'$ مع الاتجاه نفسه الموازي إلى $\vec{\upsilon}$. تُكتب المعادلة الأولى من المعادلات الثلاث أعلاه لتعطي تأثير دوبلر بإحدى الصيغتين:

$$\nu = \frac{\nu'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{\upsilon}{c}\cos\,\theta} \qquad (51\text{-}4)$$

أو

$$\nu = \frac{\nu' r\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{\left(r-\frac{\vec{\upsilon}\,.\,\vec{r}}{c}\right)} \qquad (52\text{-}4)$$

المعادلتان (4 – 51)، (4 – 52) تمثلان تأثير دوبلر في الحالة العامة أي عندما تكون سرعة الضوء ليست باتجاه خط الحركة بين المصدر و المشاهد. كما أن $\upsilon\cos\theta$ هي مركبة سرعة المصدر باتجاه موقع المشاهد في لحظة انبعاث الضوء من المصدر، أي عندما كان المصدر في نقطة الأصل.

وفي الوقت الذي يصل فيه الضوء إلى موقع المشاهد يكون المصدر قد انتقل وغيّر من موقعه و خلال هذه الفترة الزمنية يكون المصدر قد عانى تغيرات في حركته. يسمى الموقع في اللحظة التي انبعثت فيها الإشارة الضوئية الأولى بالموقع المتأخر للمصدر. لذا نرى أن جميع الكميات الواقعة على يمين العلاقة (4 – 52) تعود إلى موقع المصدر المتأخر في زمن قدره (t-r/c) في محور

الإسناد s عدا `v فتمثل هنا التردد الحقيقي للمصدر وهو التردد المقاس من قبل مشاهد في محور الإسناد `s. المتجه $\vec{r}$ هو المتجه من الموقع المتأخر للمصدر إلى نقطة الملاحظة.

إن تحويلات الطول الموجي يمكن الحصول عليها من المعادلة (4 – 51) باستخدام العلاقة بين التردد والطول الموجي. وبما أن سرعة الضوء واحدة في محوري الإسناد s و `s يكون:

$$\lambda\nu = \lambda'\nu' = c$$

$$\therefore \lambda = \gamma\lambda'(1 - \beta\cos\theta) \qquad (53\text{-}4)$$

عندما تكون $\vec{\upsilon}$ موازية إلى $\vec{r}$ في محور الإسناد s يكون المصدر مقترباً من المشاهد فيكون θ=0، cosθ=+1. تختزل المعادلة (4 – 51) إلى الصيغة:

$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}} \qquad (54\text{-}4)$$

أي أن تردد الضوء يزداد عندما يكون المصدر مقترباً من المشاهد. وبالمثل إذا كان المصدر متحركاً بعيداً عن المشاهد في حالة انبعاث الضوء فان θ=π، cosθ=-1 فتختزل المعادلة (4 – 51) إلى الصيغة:

$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}} \qquad (55\text{-}4)$$

أي أن تردد الضوء في هذه الحالة يقل كما هو مقاس من قبل مشاهد عند نقطة الملاحظة في محور الإسناد s. وعندما $\theta=90^o$، حركة المصدر عمودية على الخط الواصل بين موقع المصدر ونقطة الملاحظة فان:

$$\nu = \nu'\sqrt{1-\beta^2} \qquad (56\text{-}4)$$

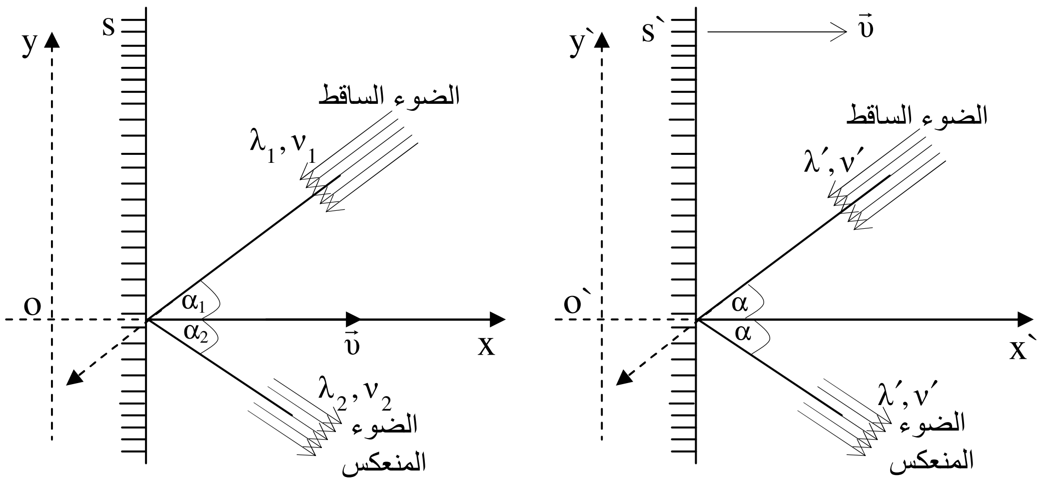
أي أن التردد الظاهري أقل من `v بعامل يساوي γ،

حيث أن: $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$

4 – 7 انعكاس الضوء من سطوح متحركة .

عندما يسقط شعاع ضوئي على سطح عاكس في حالة حركة فـان الطـول الموجي للضوء المنعكس يتغير، أي لم يعد مساوياً للطول الموجي السـاقط ذلـك يعتمد فيما إذا كان السطح يتحرك باتجاه الشعاع الضوئي أو بعيداً عنه.

علينا الآن أن ندرس قوانين الإنعكاس الخاصة بالضـوء بالنسـبة للسـطوح المتحركة بعد الاستعانة بمعادلات تحويل الموجات المستوية الممثلـة بـالعلاقتين (4 – 49)، (4 – 50).



الشكل (4–6): يتغير الطول الموجي للضوء الساقط علي مرآة متحركة في s عند انعكاسه ولكنه يبقي دون تغيير عندما ينعكس من مرآة ساكنة في \`s.

لنعتبر سطحاً عاكساً للضوء متحركاً باتجاه عمودي على مسـتواه بسـرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ في محور الإسناد s كما هو موضح في الشكل (4 – 6). ولنفـرض أن شعاعاً ضوئياً تردده ν_1 وطول موجته λ_1 يسقط على هذا السطح المستوى بزاوية سقوط α_1 و لنفرض أن الشعاع انعكس بزاوية α_2 عن العمود وبتردد ν_2 وطـول موجي λ_2. في محور الإسناد \`s الذي يتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ نسبة إلى s فإن السطح العاكس المستوى يكون في حالة سكون كما هو موضح في الشكل. وعليـه يمكن تطبيق قوانين الإنعكاس الاعتيادية في محور الإسـناد \`s وتكـون زاويـة

السقوط α مساوية إلى زاوية الإنعكاس وأن تردد الضوء v' وطـــول موجتـــه λ'.

بالنسبة للضوء الساقط:

اولاً: في محور الإسناد s' نجد أن:

$$\theta' = \pi + \alpha$$

حيث أن :

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta / \gamma}{\cos\theta - \beta}$$

ثانياً: وفي محور الإسناد s نجد أن:

$$\theta = \pi + \alpha_1$$

حيث أن: $v' = \gamma v(1 - \beta\cos\theta)$

- بالنسبة للضوء الساقط في محوري الإسناد s، s' نكتب:

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha_1)\gamma}{\cos(\pi + \alpha_1) - \beta}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha_1 / \gamma}{\cos \alpha_1 + \beta} \qquad (57\text{-}4)$$

$$\therefore v' = \gamma v_1[1 - \beta\cos(\pi + \alpha_1)]$$

$$\therefore v' = \gamma v_1(1 + \beta\cos\alpha_1) \qquad (58\text{-}4)$$

- بالنسبة للضوء المنعكس في محوري الإسناد s، s' نكتب:

$$\theta' = -\alpha$$

$$\theta = -\alpha_2$$

$$\therefore \tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha_2)/\gamma}{\cos(-\alpha_2) - \beta}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha_2 / \gamma}{\cos \alpha_2 - \beta} \qquad (59\text{-}4)$$

$$v' = \gamma v_2(1 - \beta\cos\alpha_2) \qquad (60\text{-}4)$$

ومن العلاقتين (4−57) (4−59) يمكننا كتابة العلاقة:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1 + \beta} = \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2 - \beta} \qquad (61\text{-}4)$$

وهي العلاقة التي تربط بين زاويتي السقوط و الانعكاس كما هي مُقاسة من قبل مشاهد في محور الإسناد s الذي يرى أن السطح العاكس يتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الاحداثي x مقترباً من الشعاع الساقط.

يلاحظ من العلاقة (4−61) أن $\alpha_2<\alpha_1$.

وبمساواة الطرف الأيمن للعلاقتين (4 − 58) ، (4 − 60) نحصل على:

$$\nu_1(1+\beta\cos\alpha_1)=\nu_2(1-\beta\cos\alpha_2)$$

$$\therefore \frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1-\beta\cos\alpha_2}{1+\beta\cos\alpha_1} \qquad (62\text{-}4)$$

و بما أن: $\nu_1\lambda_1=\nu_2\lambda_2=c$

$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1+\beta\cos\alpha_1}{1-\beta\cos\alpha_2} \qquad (63\text{-}4)$$

إن هذه المعادلات مهمة في مواضيع الديناميكا الحرارية بالنسبة للإشعاعات المنعكسة من سطوح عاكسة في حالة حركة.

وبما أن: $\upsilon<<c \quad , \quad 1>>\beta$

$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=(1+\beta\cos\alpha_1)(1-\beta\cos\alpha_2)^{-1}$$

$$\cong 1+\beta(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$$

لنضع الآن: $\lambda_2=\lambda_1+\delta\lambda_1$

$$=\lambda_1\left(1+\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1}\right)$$

وبالتعويض في العلاقة (4−63) ينتج:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1\left(1+\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1}\right)}\cong 1-\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1}=1+\beta(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$$

$$\therefore \delta\lambda_1=-\lambda_1\beta(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$$

وبما أن $\beta<<1$ يكون:

$$\alpha_1\cong\alpha_2$$

$$\cos\alpha_1\cong\cos\alpha_2$$

وعليه فان التغير الذي يحصل في طول موجة الضوء بعد حدوث الانعكاس على سطح عاكس يقترب من الشعاع الساقط وبسرعة منتظمة υ هو نُقصان بمقدار $\delta\lambda_1$ حيث أن:

$$\delta\lambda_1 = -2\lambda_1\beta\cos\alpha_1 \qquad (64\text{-}4)$$

وعندما يكون السطح العاكس مبتعداً عن الشعاع الساقط بسرعة منتظمة υ تكون هناك زيادة في طول موجة الضوء مساوية إلى:

$$\delta\lambda_1 = 2\lambda_1\beta\cos\alpha_1 \qquad (65\text{-}4)$$

إن هذه النتائج تتفق تماماً مع القيم التقليدية التجريبية التي أجريت من قبل بعض العلماء المختصين في هذه المواضيع.

أمثلة محلولة:

المثال (1):

جسيم كتلته الساكنة m_{01} وطاقته الكلية ε_1 يتحرك في خط مستقيم بسرعة منتظمة نحو جسيم في حالة سكون كتلته الساكنة m_{02}. جد الطاقة الكلية لأي من الجسيمين في محاور مركز الكتلة قبل التصادم مستخدماً المتجهات الرباعية للزخم والطاقة.

الحـــل :

بما أن حاصل الضرب بين المتجهات الرباعية يبقى دون تغيير يمكننا أن نكتب حاصل الضرب الآتي:

$$(p_{1\mu}+p_{2\mu}).(p_{1\mu}+p_{2\mu})=(p'_{1\mu}+p'_{2\mu}).(p'_{1\mu}+p'_{2\mu}) \qquad (1)$$

حيث أن $p_{1\mu}$ المتجه الرباعي للجسيم الساقط وأن $p_{2\mu}$ المتجه الرباعي للجسيم الساكن في محور الإسناد s. و أن $p`_{1\mu}$ ، $p`_{1\mu}$ المتجهان الرباعيان للجسيمين في محور الإسناد `s.

ومن خصائص المتجهات الرباعية للزخم والطاقة نجد أن:

$$p_{1\mu}+p_{2\mu}=\left(\vec{p}+i\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{c}\right)$$

$$p'_{1\mu}+p'_{2\mu}=\left(\vec{p}'+i\frac{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2}{c}\right)$$

حيث أن: $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1 \quad , \quad \vec{p}'=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2=0$

$$\therefore \vec{p}'_1=-\vec{p}'_2 \quad , \quad p'^2_1=p'^2_2 \quad , \quad \vec{p}_2=0 \quad , \quad \varepsilon_2=m_{02}c^2$$

وبإجراء عملية الضرب نحصل على:

$$p^2-\left(\frac{\varepsilon_1}{c}+\frac{\varepsilon_2}{c}\right)^2=-\left(\frac{\varepsilon'_1}{c}+\frac{\varepsilon'_2}{c}\right)^2$$

$$\left(p^2-\frac{\varepsilon^2{}_1}{c^2}\right)-m_{02}^2c^2-2\,m_{02}\,\varepsilon_1=-\frac{\varepsilon'^2}{c^2}$$

حيث أن: $\varepsilon'=\varepsilon_1'+\varepsilon_2'$

$$\therefore -m_{01}^2c^2-m_{02}^2c^2-2\,m_{02}\,\varepsilon_1=-\frac{\varepsilon'^2}{c^2}$$

بذلك نحصل من هذه العلاقة الأخيرة على الطاقة الكلية للنظام في محور الإسـنـاد `s أي أن:

$$\varepsilon'=\left[\left(m_{01}c^2\right)^2+\left(m_{02}c^2\right)^2+2\,m_{02}c^2\,\varepsilon_1\right]^{1/2} \qquad (2)$$

نرجع مرة أخرى إلى حاصل الضرب الممثل بالمعادلة (1) فنجد أنه يساوي:

$$p_{1\mu}\cdot p_{2\mu}=p_{1\mu}'\cdot p_{2\mu}'$$

$$\therefore -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2}=-p_1'^2-\frac{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}{c^2}$$

$$\therefore m_{02}\,\varepsilon_1=p_1'^2+\frac{\varepsilon_1'}{c^2}\left(\varepsilon'-\varepsilon_1'\right)=p_2'^2+\frac{\varepsilon_2'}{c^2}\left(\varepsilon'-\varepsilon_2'\right)$$

$$=\left(p_1'^2-\frac{\varepsilon_1'^2}{c^2}\right)+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon'}{c^2}$$

$$m_{02}\,\varepsilon_1=m^2{}_{01}c^2+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon'}{c^2}$$

و من العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$\varepsilon_1'=\frac{\left(m_{01}c^2\right)^2+\left(m_{02}c^2\right)\varepsilon_1}{\varepsilon'}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\varepsilon_2'=\frac{\left(m_{02}c^2\right)^2+\left(m_{01}c^2\right)\varepsilon_1}{\varepsilon'}$$

المثال (2):

لقد دلت بعض الملاحظات المسجلة عن جسم فلكي أنه عند إرساله إشـــعاعاً نحو الأرض كان يسير مبتعداً عنها بسرعة تساوي 0.8c فـــإذا كـــان لأحـــد خطوط طيفه طول موجة تساوي $1200A^o$ عندما انبعث من مصدر في حالة سكون. فما طول موجة هذا الخط في الطيف الملاحظ للجسم الفلكي؟.

الحـــــل :

بما أنه في حالة ابتعاد الجسم عن المشاهد يقل التردد الذي يرسله الإشـــعاع، لـــذا نستخدم العلاقة:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda'} \sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$$

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}} = 1200 \sqrt{\frac{1.8}{0.2}}$$

$$\therefore \lambda = 3600 \text{ A}^o$$

المثال (3):

سقط ضوء طول موجته $6000A^o$ بشكل عمودي على مرآة مستوية تتحـــرك مبتعدةً عن اتجاه الضوء الساقط بسرعة $3x10^7 ms^{-1}$. أحسب:

أولاً: التغيير الحاصل في طول موجة الضوء المنعكس.

وإذا سقط الضوء على المرآة المتحركة بزاوية سقوط تساوي 45°. أحسب:

أولاً: التغيير الحاصل في طول موجة الضوء المنعكس.

ثانياً: زاوية الانعكاس.

الحـــــل :

أولاً: نطبق العلاقة:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1-\beta\cos\alpha_1}{1+\beta\cos\alpha_2}$$

وبما أن: $\alpha_1=\alpha_2=0^o$

$$\therefore\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1-\beta}{1+\beta}=\frac{0.9}{1.1}=\frac{9}{11}$$

$$\therefore\ \Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1=\frac{11\lambda_1}{9}-\lambda_1$$

$$=\frac{2}{9}\lambda_1=\frac{2}{9}\times 6000$$

$$=\frac{4000}{3}=1333\ A^0$$

ثانياً:

$$\Delta\lambda=2\lambda_1\beta\cos\alpha_1$$

$$=2\,x\,6000\,x\,0.1\cos 45$$

$$=840\ A^o$$

ثالثاً:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1-\beta\cos\alpha_1}{1+\beta\cos\alpha_2}=\frac{1-0.1\times0.7}{1+0.1\cos\alpha_2}$$

$$\frac{6}{6.84}=\frac{0.93}{1+0.1\cos\alpha_2}$$

و من هذه العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$\alpha_2=53^o$$

المثال (4):

إذا كان V_μ يمثل متجهاً رباعياً للسرعة فاستنتج أن $\sum_\mu V_\mu^2$ تبقى دون تغييـــر تحت تحويلات لورنس.

الحـــــل:

بما أن V_μ متجه رباعي، فانه يتحول بالطريقة نفسها التي يتحــول فيهــا المتجــه الرباعي x_μ أي أن:

$$V_1' = \gamma\left(V_1 + i\,\beta V_4\right)$$
$$V_2' = V_2$$
$$V_3' = V_3$$
$$V_4' = \gamma\left(-i\,\beta V_1 + V_4\right)$$

وبتربيع طرفي هذه المعادلات ومن ثم إجراء عملية الجمع نحصل على:

$$\sum_\mu V_\mu'^2 = \gamma^2\left[\left(1-\beta^2\right)V_1^2 + \left(1-\beta^2\right)V_4^2\right] + V_2^2 + V_3^2$$

$$= V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2$$

$$\therefore \sum_\mu V_\mu'^2 = \sum_\lambda V_\lambda^2$$

وبما أن:

$$V_\lambda = \left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}, \frac{ic}{\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)}}\right)$$

$$\therefore \sum_\lambda V_\lambda^2 = \frac{u^2 - c^2}{\left(1-u^2/c^2\right)}$$

$$\therefore \sum_\mu V_\mu'^2 = \sum_\lambda V_\lambda^2 = -c^2$$

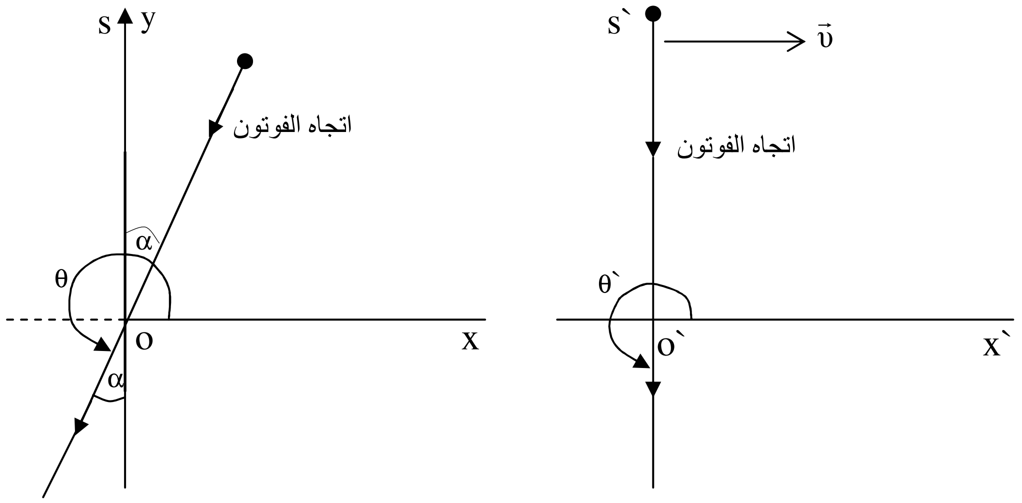
المثال (5):

فوتون طاقته ε يسير باتجاه نحو نقطة الأصل في محور الإسناد s ويعمــل زاوية مقدارها α مع الاحداثي y. مستخدماً معــادلات تحويــل الموجــات المستوية جد.

أولاً: طاقة الفوتون في محور الإسناد `s حيث يشاهد الفوتون يتحرك مستقيماً نحو الأسفل باتجاه الاحداثي y السالب.

ثانياً: السرعة النسبية بين محوري الإسناد.

الحـــــل:



الشكل (4 – 7): فوتون يصنع اتجاه زخمه الزاوية α مع الاحداثي y في s ويشاهد متحركاً نحو الأسفل بالاتجاه السالب للاحداثي y في `s.

نفرض أن $\mathcal{E}=h\nu$ حيث أن ν التردد في محور الإسناد s. ونفرض أن $\mathcal{E}'=h\nu'$، حيث أن `ν التردد في محور الإسناد `s. وبالاستعانة بمعادلات تحويل الموجات الكهرومغناطيسية المستوية نكتب:

$$\nu = \gamma\nu'(1+\beta\cos\theta') \qquad (1)$$

$$\nu\cos\theta = \gamma\nu'(\cos\theta'+\beta) \qquad (2)$$

ومن الشكل (4 – 7) نجد أن $\theta=\frac{3\pi}{2}-\alpha$ و $\theta'=\frac{3\pi}{2}$. وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$h\nu = \gamma h\nu'\left[1+\beta\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$\therefore\ \mathcal{E} = \gamma\,\mathcal{E}' \qquad (3)$$

$$h\nu\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \gamma h\nu'\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\beta\right]$$

$$\therefore\ -\mathcal{E}\sin\alpha = +\gamma\,\mathcal{E}'\beta$$

وبما أن $\mathcal{E}=\gamma\mathcal{E}'$ من العلاقة (3) ينتج أن:

$$\beta=-\sin\alpha$$

$$\upsilon=-c\sin\alpha$$

$$\therefore\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$\therefore\ \gamma=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\therefore\ \mathcal{E}'=\mathcal{E}\cos\alpha$$

تمارين الفصل الرابع

1- بروتون سريع يمتلك طاقة كلية ε اصطدم مع بروتون آخر كان ساكناً. فإذا علمت أن كتلة السكون للبروتون هي m_0. استنتج باستخدام المتجهات الرباعية للطاقة والزخم أن الطاقة الكلية للنظام قبل التصادم في محاور مركز الكتلة `s تساوي: $\left[2m_0c^2\left(\varepsilon+m_0c^2\right)\right]^{1/2}$.

2- اصطدم جسيم مع آخر مماثل له كان ساكناً ونتيجة لهذا التصادم انحرف الجسيم الساقط بزاوية 30°. فإذا علمت أن طاقته الحركية قبل التصادم تساوي طاقة سكونه. اثبت باستخدام المتجهات الرباعية للزخم والطاقة أن طاقته الحركية تختزل إلى الثلث بعد التصادم.

3 – حصل تصادم بين جسيمين متماثلين، الكتلة الساكنة لكل منهما m_0. مستخدماً المتجهات الرباعية للزخم والطاقة جد الزاوية المحصورة بين اتجاهيهما بعد التصادم في المحاور المختبرية أو محاور الإسناد s.

4 – مصدر ضوئي يرسل إشعاعاً ضوئياً بصورة متجانسة من جميع الجهات وهو في حالة سكون بالنسبة لمشاهد في `s. فإذا كان المصدر يتحرك بسرعة منتظمة تساوي c/3 بالنسبة لمشاهد في s فما هي زاوية رأس المخروط الضوئي الذي يضم نصف عدد الفوتونات المتحررة من المصدر.

5 – موجة ضوئية تنتشر باتجاه الاحداثي x الموجب في محور الإسناد s يعبر عنها بالمعادلة $y = A\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)$. مستخدماً معادلات تحويل المتجهات الرباعية جد العلاقة بين ν و `$\nu$ حيث أن `ν تردد الموجة في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة منتظمة υ نسبة لمحور الإسناد s.

6 – لوحظ إشعاع ينبعث من ذرات كانت تتحرك مقتربة من مشاهد وكان تردد ذلك الإشعاع يساوي 10^{15}Hz. فإذا علمت أن تردد الإشعاع المنبعث من تلك الذرات وهي في حالة سكون يساوي $5x10^{14}$Hz. أحسب سرعة الذرات المتحركة. ج: $\upsilon=0.6c$

7 – مرآة مستوية مثبتة في محور الإسناد `s العمود على سطحها موازياً للاحداثي `x. سقطت حزمة ضوئية في المستوى `x`y على سطح المرآة ثم انعكست منه. فإذا كانت θ هي زاوية السقوط وأن φ زاوية الانعكاس كما هي مُقاسة في محور الإسناد s. استنتج أن العلاقة بين الزاويتين θ و φ تعطى بالمعادلة:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\upsilon^2 + c^2\right)\cos\theta + 2\,\upsilon c}{\upsilon^2 + c^2 + 2\,\upsilon c\cos\theta}$$

حيث أن υ السرعة النسبية بين محوري الإسناد.

8 – خط طيفي لعنصر الكالسيوم في طيف أحد النجوم الذي يسمى ألفا سنتوري كان له طول موجي $3968.20A^o$ و كان للخط نفسه في الطيف الشمسي طول موجي $3968.49A^o$.

أولاً: ما هي السرعة الشُعاعية لذلك النجم بالنسبة للنظام الشمسي وهل كان في حالة ابتعاد أم اقتراب؟

ثانياً: إذا علمت أن السرعة المستعرضة لذلك النجم تساوي سرعته الشُعاعية تقريباً و أن بعده عن الشمس يساوي 4.3 سنة ضوئية فبأية زاوية يتغير موضعه في السماء خلال 10 سنوات؟

ثالثاً: ما مقدار السرعة التي يجب أن تمتلكها أيونات عنصر الكالسيوم و هي تتحرك عمودياً (بصورة مستعرضة) على خط النظر ليتغير الطول الموجي الاعتيادي ($3968.49A^o$) بمقدار $0.29A^o$ و هل يمكن تمييز الضوء عن ذلك الضوء المنبعث من نجم ألفا سنتوري؟

أولاً: $22kms^{-1}$ مقترباً

ج: ثانياً: حوالي 0.01^o

ثالثاً: $3600kms^{-1}$، نعم

الفصل الخامس
(الجُسيمات الأولية)

1.5 خواص الجُسيمات الأولية.
2.5 انحلال الجُسيمات
3.5 إنتاج الباريونات و الميزونات
4.5 إنتاج بروتون الضد
5.5 إنتاج الزوج بواسطة الفوتونات
أمثلة محلولة.
تمارين الفصل الخامس

الجُسيمات الأولية

5-1 خواص الجُسيمات الأولية.

أن دراسة إمكانية تجزئة المادة إلى جسيمات أصغر و أصغر كانت ولا تزال من أكثر مواضيع البحوث إثارة. فقد تم تأكيد وجود الذرات والجزيئات في القـرن التاسع عشر وأن تجارب وأفكار رذرفورد و بور وآخـرين فـي بدايـة القـرن العشرين قد رسمت الطريق إلى وضع الذرة على أسس ثابتة دلت على أن النـواة يمكن تجزئتها، وقد أدى أول تفاعل نووي تمت دراسته من قبل رذرفـورد إلـى تقوية وجهة النظر هذه وأن اكتشاف شادويك للنيوترون عام 1932 قد أنهى الجدل الذي كان قائماً آنذاك حول نوع الجسيمات المتواجدة في النواة. حيـث لـوحظ أن الذرة تتكون من نواة يحيط بها غيم إلكتروني وتتكون النـواة مـن البروتونـات والنيوترونات المرتبطة بعضها ببعض بواسطة قوى شديدة ستتم مناقشاتها في البند اللاحق.

لقد ظهرت اكتشافات عديدة بعد ذلك في مجال ما يسمى بالجسيمات الأوليـة بواسطة دراسة الأشعة الكونية التي لها قابلية الاختراق وأصلها في الغالـب مـن خارج مجموعتنا الشمسية أي من الفضاء الخارجي، وقد ثبت أنها تمثل مصـدراً

مهما للجسيمات ذات الطاقة العالية اللازمة في دراســـة الجســيمات الأوليــة. إن الإشعاع الأولي الذي يدخل جو الأرض يتكون من النوى وأكثرها بروتونات ويقوم هذا الإشعاع عند التصادم مع النوى الموجودة في الطبقات العليا من جــو الأرض بتوليد مختلف الجسيمات الأخرى التي يمكن دراستها على ســطح الأرض ولكــن معظمها قد تمت دراسته بواسطة الرقوق النووية والأجهزة الأخرى التي تم نقلهــا إلى الطبقات العليا من الجو باستخدام البالونات.

إن تصنيف الجسيمات الأولية يعتمد على استخدام بعض الأعداد الكميــة و هــي البرم الذاتي و التماثل إضافة إلى البرم النظيري (T) ومركبته (T_3) و كذلك بعض الأعداد الكمية الجديدة والتي ظهرت مؤخراً في مجال بحوث الجســيمات الأوليــة وأكثرها شيوعاً هو العدد الكمي للغرابة وكذلك العدد الباريوني والعدد اللبتوني.

جدول (5−1): الجسيمات الأولية

الصنف		أسم الجسيم	الرمز		الكتلة MeV	البرم	الشحنة		معدل العمر s
			الجسيم	الضديد			الجسيم	الضديد	
الفوتونات		فوتون، جاما، كم	γ		0	1	0		مستقر
اللبتونات		الكترون، بوزيترون	e^-	e^+	0,511	1/2	-1	1	مستقر
		نيوترينو الكتروني	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0 (?)	1/2	0	0	مستقر
		ميون	μ^-	μ^+	105,7	1/2	-1	+1	$2,2.10^{-6}$
		نيوترينو ميوني	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0 (?)	1/2	0	0	مستقر
الميزونات	البايونات	بايون متعادل	π^0	$\bar{\pi}^0$	135	0	0	0	$1,8.10^{-16}$
		بايون مشحون	π^+	π^-	139,6	0	+1	-1	$2,6.10^{-8}$
	الكايونات	كايون متعادل	K^0	$\bar{K}^0$	498	0	0	0	$0,9.10^{-10}$
		كايون مشحون	K^+	K^-	493,7	0	+1	-1	$1,2.10^{-8}$
الباريونات		بروتون	P	$\bar{P}$	938,3	1/2	+1	-1	مستقر
		نيوترون	n	$\bar{n}$	939,6	1/2	0	0	920
هايبرونات		لامبدا هايدرون	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	1115,6	1/2	0	0	$2,6.10^{-10}$
		سيجما هايدرون	Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$	1189,4	1/2	+1	-1	$0,8.10^{-10}$
			Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	1192,5	1/2	0	0	6.10^{-20}
			Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$	1197,3	1/2	-1	+1	$1,5.10^{-10}$
		كساي هايدرون	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	1315	1/2	0	0	$2,9.10^{-10}$
			Ξ^-	$\bar{\Xi}^-$	1321	1/2	-1	+1	$1,64.10^{-10}$

إن الجدول (5 – 1) يبين معظم الخواص المهمة للجسيمات الأولية حيث يحتــوي العمود الأول في الجدول على الجسيمات المصــنفة إلــى فوتونــات و لبتونــات

وميزونات وباريونات، والعمود الثاني يعطى الرمز المستخدم للدلالة على الجسيم، أما العمود الثالث فيحتوي على الرمز المستخدم للدلالة على الجسيم وضديده، فيما تتضمن الاعمدة: الرابع والخامس والسادس الكتلة والبرم وشحنة الجسيم وضديده على التوالي. أما العمود السابع فيعطي معدل العمر للجسيمات. وفى هذا الجدول تمت تسمية الجسيمات بالجسيمات طويلة العمر وذلك لأن معدلات أعمارها تكون طويلة بالمقارنة مع الوحدة المناسبة للأنحلالات الناتجة عن التفاعلات النووية القوية وهي بحدود ($10^{-23}s$). لقد استدل العلماء بواسطة النظرية الكمية النسبية على وجود الجسيمات الضد للجسيمات الأولية والتي لها كتلة الجسيم الأصلي نفسها ولكن بشحنة معاكسة في حالة كون الجسيم الأصلي مشحوناً و تفنى عند التقائها بالجسيم الأصلي أي تتحول كتلتاهما السكونية إلى طاقة على شكل كمات. وقد تم اقتراح وضع خط على الرمز الذي يمثل الجسيم الضد أو إشارته المناسبة.

ففي عام 1933 اكتشف أول جسيم ضد عند تعرض حجرة السحاب إلى الأشعة الكونية والذي تبين أن له كتلة الإلكترون نفسها ولكن بشحنة موجبة. وسُمي هذا الجسيم بالبوزيترون ويرمز له بالرمز (e^+) و أن هذا الجسيم يفنى عند التقائه بالإلكترون (e^-) ويتولد نتيجة لهذا التفاعل فوتونان كل منهما له طاقة (0.511MeV) وهي طاقة السكون للإلكترون (أو البوزيترون). ومن الممكن توليد البوزيترونات بسهولة بواسطة عملية إنتاج الزوج والتي سيتم شرحها في البند (5 – 5). من الممكن أن يتكون الإلكترون و البوزيترون كذلك من انحلال بيتا حيث يرافق تكون البوزيترون ما يسمى بالنيوترينو الالكتروني (ν_β)(*). ولكن في بعض الأحيان ينبعث الميون (μ^-) بدلاً من النيوترينو لأن الميون هو جسيم أولي له نفس خصائص الإلكترون ماعدا كتلته السكونية التي تعادل (207) مرة بقدر كتلة الإلكترون أي أنه إلكترون ثقيل كما يعتقد البعض.

في عام 1936 اكتشف أن الأشعة الكونية الساقطة على مستوى سطح البحر تحتوي على جسيمات هي الميونات و الإلكترونات بنسبة 4 إلى 1 (ميون إلى إلكترون)، وبما أن (e^+) هو الجسيم الضد للإلكترون، فإن (μ^+) هو الجسيم الضد

(*) الرمز (ν_β) أو (ν_e) للدلالة على النيوترينو الالكتروني أما الرمز (ν_μ) الذي سيرد لاحقاً فيدل على النيوترينو الميوني.

للميون، وهنا يبرز تساؤل، لماذا لا تحتوي المـــادة علـــى ميونـــات، بـــدلاً مـــن الإلكترونات؟ والجواب على ذلك هو انحلال الميونات إلى إلكترونات بعمر نصف ($1.5x10^{-6}s$)، حسب الانحلال التالي:

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

حيث ($\bar{\nu}_e$) مضاد النيوترينو الإلكتروني و (ν_μ) النيوترينو الميوني على التـــوالي. وهذا يعود إلى ظهور نوعين من النيوترينو هما (ν_e) الذي يصاحب الالكترونات و (ν_μ) الذي يصاحب الميونات حيث تم اكتشافهما من قِبل مجموعة من الباحثين من بروكهيفن عام 1963. إن هذه الجسيمات (μ^-,e^-,ν_e,ν_μ) تُسمى اللبتونات التي تنحل بواسطة التفاعلات النووية الضعيفة التي ستتم مناقشتها في البنـــد (5 – 2)، ولهـــا أعداد لبتونية (+1) للإلكترون و النيوترينو و (–1) للبوزيترون و النيوترينو الضد.

أما الهادرونات الشائعة فهي البروتونات و النيوترونات فمنذ عام (1947) تم اكتشاف عدد كبير من الهادرونات غير المستقرة حيث اكتشف (21) منها لها عمر نصف طويل ($10^{-10}s$)، لذا فان مساراتها تكون واضحة في حجرة الفقاعة.

يوجد نوعان من الهادرونات هما الميزونات و الباريونات و تشـــمل البروتونـــات والنيوترونات وهذه تكون ناتجاً نهائياً لانحلال الجسيمات الأخرى حيـــث تخضـــع لقانون حفظ العدد الباريوني وتكون قيمته (+1) للبروتـــون و النيـــوترون و (–1) للبروتون الضد و النيوترون الضد.

أما الميزونات فان أعدادها الباريونية تساوي صفراً وأن أطول عمر تعيشـــه الميزونات هي البايونات (π) و الكايونات (K) و أن كتلة البايون تساوي 1/7 مـــن كتلة البروتون. وتوجد ثلاثة أنواع من البايونات (π^-,π^+,π^0) وان π^- هـــو البـــايون الضد لـــ π^+ و أن π^0 هو ضديد نفسه و أن عمر النصـــف لـــــ π^+ و π^- هـــو ($9.6x10^{-8}s$)، أما π^0 فانه ينحل إلى فوتونين بعمر نصـــف مقـــداره ($1.8x10^{-16}s$) وهذا يدل على أن سرعة انحلالها أسرع من انحلال (π^-,π^+).

وفي عام 1936 أي قبل أحد عشر عاماً من اكتشاف البـايون تنبـأ العـالم الياباني يوكاوا بوجود البايونات وكذلك كتلتها التي وافقت كتلة البايون المقاسة عند تولدها بواسطة البروتونات المعجلة في السايكلترون بطاقة تساوي عـدة ملايـين إلكترون فولت. وفي عام 1947 اكتشف البايون في الأشعة الكونية عـن طريـق مساراتها التي لوحظت في الرقائق.

أما الكايونات فلها كتلة تساوي 1/2 كتلة البروتون وتتواجـد بنـوعين همـا (K^0, K^+) وجسيماتها الضد هي $(\overline{K}^0, K^-)$ وعمر النصف لــ K^+ هو $(1.2x10^{-8}s)$ و لــ K^0 هو $(0.9x10^{-10}s)$.

إن بعض الباريونات تسمى الهايبرونات و هي تعيش فترة طويلة لذا فإنهـا تترك مسارات واضحة في حجرة الفقاعة و هي أربع جسيمات و تكون أثقل مـن البروتونات وهي لمدا (Λ) و سيكما (Σ) و كساي (Ξ) و أوميجا (Ω) وجميع هـذه الجسيمات تصاحب الكايونات، و لذلك تُعتبر الباريونـات الأربعـة و الكايونـات أجساماً غريبة وتتحل بزمن أقل بــ 10^{14} مرة من الزمن $(10^{-23}s)$. وبسبب ذلك تم وضع قانون حفظ الغرابة.

و في عام 1955 أي في السنة التالية لبناء معجل البيتـاترون، فـان العـالم شامبرلن و جماعته اكتشفوا البروتون الضد $\overline{P}$ الذي نتج بقصف النـواة بواسـطة بروتونات طاقاتها الحركية تساوي 6 GeV. و سنتناول هذا الموضوع فـي البنـد (4-5)

أما في عام 1956 فقد اكتشف النيوترون الضـد $(\overline{n})$. ولأن النيـوترون متعـادل الشحنة فان ضديده متعادل الشحنة أيضاً و له كتلة مساوية لكتلة النيوترون نفسـها و يفنى عند التقائه بنيوترون أو بروتون و أن نواتج الاضمحلال هي البايونات.

5 – 2 انحلال الجُسيمات

من المعروف أن الجسيمات الأولية تخضع لقوانين فيزياء الطاقـة العاليـة. ولكي نفهم خواص هذه الجسيمات ينبغي علينا أن نكون قادرين على وصف قـوى التفاعلات التي تحصل فيما بينها. إذن لابد من إلقاء الضوء على هذه التفـاعلات

وهي: التفاعلات الكهرومغناطيسية التي يتم خلالها تبادل الفوتونات (كمات المجال الكهرومغناطيسية) والتفاعلات النووية حيث يتم تبادل البايونات (π) و الكايونـــات (K). والتفاعلات التثاقلية التي هـــي أضـــعف التفـــاعلات يـــتم خلالهـــا تبـــادل الگرافيتونات (G)، (كمات المجال التثاقلي) و قد تم افتراضها لهـــذا النـــوع مـــن التفاعلات. هذه التفاعلات تحدث بين الأجسام ذات الكتل الكبيرة (كالنجوم مـــثلاً) عند تعرضها لتعجيلات كبيرة جداً.

أما التفاعلات الضعيفة والتي تحدث بين بعض أنواع الجسيمات الأولية فيـــتم تبادل الجسيمات (W) خلالها. و إن هذه الجسيمات هي كمات تم افتراضها لهـــذا النوع من التفاعلات والجدول (5 – 2) يوضح ذلك.

الجدول (5–2) التفاعلات الأساسية.

التفاعلات	القوة النسبية	جسيمات المجال
القويـــــــة	1	البايونات
الكهرومغناطيسية	10^{-2}	الفوتونات
الضعيفة	10^{-13}	جسيم (ω)
التثاقلية	10^{-40}	الگرافيتون (G)

إن الجسيمات الأوليـــة، الإلكتـــرون (e^-) والبروتـــون (P) و الفوتـــون (γ) والجسيمات الضد، البوزيترون (e^+) و بروتون الضد ($\bar{P}$) لها خصائص جوهرية كالشحنة الكهربائية المحددة وكتلة السكون (أو طاقة السكون) و الـــزخم الـــزاوي والبرم و معدل العمر قبل الانحلال حيث أن هذه الجسيمات الخمسة هي جســـيمات مستقرة ضد الانحلال التلقائي ولها معدل عمر لانهائي كما موضح فـــي الجـــدول (3 – 5).

الجدول (5–3): بعض الخصائص لبعض الجسيمات الأولية.

الجسيم	كتلة السكون m_e	طاقة السكون MeV	وحدة الشحنة (e)	البرم	معدل العمر s
الفوتون (γ)	0	0	0	1	∞
الالكترون (e^-)	1	0.511	-1	1/2	∞
البوزيترون (e^+)	1	0.511	+1	1/2	∞
البروتون (p^+)	1836	938.256	+1	1/2	∞
ضديد البروتون (p^+)	1836	938.256	-1	1/2	∞

سنكتفي في هذا البند بتوضيح كيفية تبـــادل الفوتونـــات خـــلال التفـــاعلات الكهرومغناطيسية، و البايونات خلال التفاعلات القوية (النوويـــة) حيـــث ســـنأخذ التفاعل بين إلكترونين كمثال على التفاعلات الكهرومغناطيسية لتوضـــيح كيفيـــة تبادل الفوتونات بينهما. ففي الشكل (5 – 1) نلاحظ أن الإلكترون فـــي النقطـــة A يبعث فوتوناً وهمياً بطاقة تساوي $\mathcal{E}_\gamma$ وبزخم خطي P_γ فيرتد الإلكترون إلى اليسار بسرعة تساوي u ‏($u << c$) وبعد فترة معينة من الزمن يتم امتصاص هذا الفوتون من قبل الإلكترون الموجود في النقطة B الذي يرتد بعدها إلى اليمـــين بالســـرعة نفسها u، بافتراض أن الزخم الخطي محفوظ دائماً قبـــل وخـــلال وبعـــد تبـــادل الفوتونات. ولتوضيح ذلك لابد من حساب الطاقة ($\Delta\mathcal{E}_\gamma$) المتبادلة بين الإلكتـــرونين خلال فترة زمنية (Δt).

قبل انبعاث الفوتون الوهمي من الإلكترون الموجود في النقطـــة A تكـــون طاقـــة النظام هي عبارة عن طاقة السكون الكلية ($\mathcal{E}_0$) للإلكترونين. و بافتراض أن الزخم الخطي الكلي يساوي صفراً فان انبعاث الفوتون سوف يمنح زخماً إلي الإلكتـــرون مقداره (P_e) أي أن:

$$P_e = mu = P_\gamma = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{c} \qquad (1\text{-}5)$$

حيث أن m كتلة الإلكترون و u سرعته.

وبتطبيق قانون حفظ الطاقة من الممكن حساب الطاقة الكلية $\mathcal{E}$ بعد الانبعاث وقبل حدوث عملية الامتصاص و هي:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\gamma + T \qquad (2\text{-}5)$$

حيث أن T الطاقة الحركية للإلكترون وتساوي $\frac{1}{2}mu^2$ في حال إهمال التأثيرات النسبية.

إذن الطاقة المتبادلة بين الإلكترونين تساوي:

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = T + \mathcal{E}_\gamma = \frac{1}{2}mu^2 + \mathcal{E}_\gamma \qquad (3\text{-}5)$$

ومن العلاقة (5 – 1) نجد أن:

$$\mathcal{E}_\gamma = cp_\gamma = muc \qquad (4\text{-}5)$$

وبتعويض المعادلة (5 – 4) في المعادلة (5 – 3) نحصل على:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}mu^2 + muc \qquad (5\text{-}5)$$

$$\therefore\ \Delta\mathcal{E} = mu\left(\frac{u}{2} + c\right) \qquad (6\text{-}5)$$

وبما أن u<<c تختزل المعادلة الأخيرة إلى:

$$\Delta\mathcal{E} = muc = \mathcal{E}_\gamma \qquad (7\text{-}5)$$

نستنتج من المعادلة (5 – 7) أن الطاقة المتبادلة هي طاقة الفوتون الوهمي خلال فترة زمنية مساوية إلى Δt. و بواسطة مبدأ اللايقين لهايزنبرك بصيغته الثانية(*) من الممكن حساب هذه الفترة الزمنية التي تم بواسطتها تبادل الطاقة $\Delta\mathcal{E}$.

$$\therefore\ \Delta t = \frac{\hbar}{\Delta\mathcal{E}} = \frac{\hbar}{\mathcal{E}_\gamma} \qquad (8\text{-}5)$$

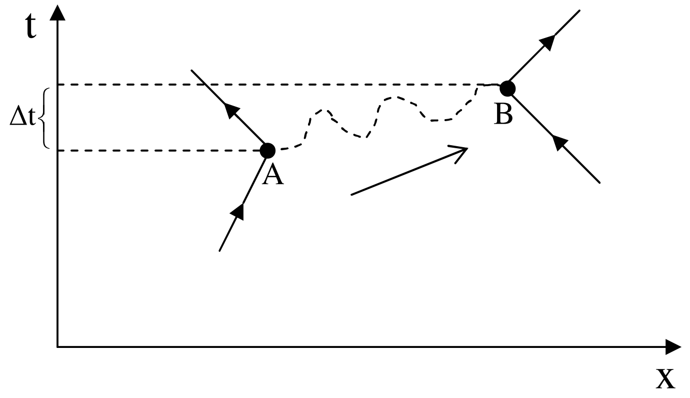
وإذا اعتبرنا أن $\mathcal{E}_\gamma = 1eV$ فان:

$$\Delta t = \frac{10^{-34}}{1\times 1.6\times 10^{-19}} = 10^{-15}\ s \qquad (9\text{-}5)$$

(*) هناك صيغتان لمبدأ اللايقين لهايزنبرك الأولى هي $\Delta x\Delta P \geq \hbar$ و الثانية هي $\Delta t\Delta\mathcal{E} \geq \hbar$.

نلاحظ من المعادلة (5 – 9) أن زمن تبادل الفوتون هو بحدود $10^{-15}s$. وهكذا فــان الفوتونات التي هي بطاقة أقل تحتاج إلى زمن أطول للتبادل. و من الممكن حساب أكبر مسافة تفصل بين الإلكترونين Δx كالآتي:

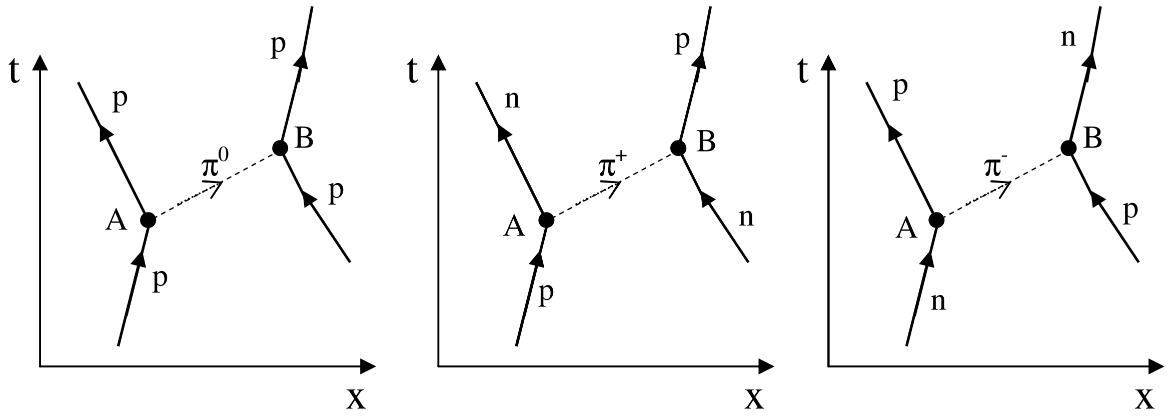
$$\Delta x \le c\Delta t \le 3\times10^{8}\times10^{-15} \cong 3\times10^{-7}\ m \cong 3000\ A^{o}$$



(الشكل 5 – 1): تبادل الفوتونات خلال التفاعلات الكهرومغناطيسية بين إلكترونين.

والجدير بالملاحظة هنا هو أن فوتونات التبادل الوهمية سُــميت هكــذا ذلــك لأن الفوتونات لايمكن تحسسها بصورة مباشرة، فالفوتون يــتم امتصاصــه بواســطة الإلكترون B بعد فترة زمنية قصيرة جداً من لحظة انبعاثه من قِبل الإلكترون A. وينبغي أن نذكر أن الفوتونات الوهمية لا تخضع لقوانين حفظ الطاقة، لكن وبسبب مبدأ اللايقين و صغر الفترة الزمنية Δt فان الطاقة الزائدة التي يمتلكهــا الفوتــون هي أقل من اللايقين في حساب طاقته الممثلة بالعلاقة $\Delta\varepsilon \approx \hbar/\Delta t$.

أما بالنسبة للتفاعلات النووية القوية فسنأخذ بروتون ـ بروتون أو بروتــون- نيوترون لكى نوضح كيفية تبادل البايونات خلالها، والشكل (5 – 2) يوضح ذلك.



(الشكل 5 – 2): تبادل البايونات خلال التفاعلات القوية (بروتون–بروتون) و(نيوترون–بروتون) و(بروتون–نيوترون).

من المعروف أن القوة النووية قصيرة المدى لذا فانها تختلف عن القوة المغناطيسية طويلة المدى. إن القوة النووية تصبح مساوية صفراً في المسافات التي هي أكبر من حوالي (1.4f)(*) لذا فان زمن تبادل البايونات يكون اقصر من زمن تبادل الفوتونات. لو فرضنا أن البايون ينتقل بسرعة الضوء (c) تكون الفترة الزمنية لتبادل البايون بين الجسيمين المتفاعلين مساوية إلى:

$$\Delta t = \frac{R}{c} = \frac{1.4 \times 10^{-15}}{3 \times 10^{8}} \cong \frac{1}{2} \times 10^{-23}\ \mathrm{s}$$

و باستخدام مبدأ اللايقين من الممكن إيجاد الطاقة المتبادلة ($\Delta\mathcal{E}$):

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{10^{-34}}{1/2 \times 10^{-23}}$$
$$= 2 \times 10^{-11}\ \mathrm{J} = 60\ \mathrm{MeV}$$

إذن يمكن ايجاد كتلة البايون من العلاقة:

$$\mathcal{E}_{\pi} = m_{\pi} c^{2}$$

$$\therefore m_{\pi} = \frac{\mathcal{E}_{\pi}}{c^{2}} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{c^{2}} = \frac{2 \times 10^{-11}}{\left(3 \times 10^{8}\right)^{2}} = 2 \times 10^{-28}\ \mathrm{kg} = 200\, m_{e}$$

(*) f – (فيرمى) أو في بعض المصادر (فيمتو) $1f = 10^{-15} m$

نلاحظ من هذه الحسابات أن للبايون كتلة محددة تساوي 200 مـــرة بقـــدر كتلـــة الإلكترون، والجدول (5 – 4) يبين خصائص البايونات بالتفصيل.

الجدول (5–4): خصائص البايونات.

الخاصية	π^+	π^-	π^0
كتلة السكون (m_e)	273,3	273,3	264,30
طاقة السكون (MeV)	139,58	139,58	134,97
الشحنة (e)	+1	-1	0
البرم	0	0	0
العزم المغناطيسي	0	0	0
معدل العمر (s)	$2,6.10^{-8}$	$2,6.10^{-8}$	$1,8.10^{-16}$
نماذج الانحلال	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu (99.99\%)$ $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e (0.01\%)$	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e$ $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma (98.8\%)$ $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \nu_e (1.2\%)$

إن معظم الجسيمات الأولية غير المستقرة تنحل بواسطة التفاعل الضـــعيف بأعمار طويلة مقارنة بالتفاعل النووي (10^{-23}s) و البعض الآخر ينحـــل بواســـطة التفاعل الكهرومغناطيسي باعمار حوالي (10^{-16}s) و من هذه الجسيمات الميونـــات والبايونات المشحونة والكايونات المشحونة وغير المشحونة و كـــذلك النيـــوترون وضديده و الهايبرونات المشحونة و غير المشحونة. والمثال التالي يوضح انحلال (K^+) إلى بايونين:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

و للسهولة نأخذ الأنحلال في محور اسناد يكون فيه الجسيم (K^+) في حالة ســـكون و أن المسافة التي يتحرك خلالها الجسيم π^0 بسرعة (0.1c) هي:

$$x = 0.1ct = 0.1 \times 3 \times 10^8 \times 10^{-16} = 3 \times 10^{-9}\, m = 30 A^o$$

و هذه المسافة صغيرة لا يمكن رؤيتها حتى في حجرة الفقاعة، لذا يظهر الجســـيم (K^+) الذي ينحل مباشرة إلى π^+ و فوتونين:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \gamma + \gamma$$

أما البايونات المشحونة فإنها تتحل بواسطة التفاعل الضعيف كمايلي:

وإن عمر النصف لكل من π^+ و π^- هي بحدود ($2.6x10^{-8}s$)، أما π^0 فانه يتحـــول إلى فوتونين بواسطة التفاعل الكهرومغناطيسي وله عمر نصف بحدود ($10^{-16}s$).

عندما تنحل الجسيمات الأولية غير المستقرة و هي في حالة سكون أو فـــي حالة حركة، فعملية الأنحلال كما لاحظنا يمكن تفسيرها ضمن قوانين حفظ الزخم الخطي وحفظ الكتلة مع الطاقة. ولنعتبر على سبيل المثال جســيماً مشــحوناً هــو البايون (π^+) و هو في حالة حركة بسرعة منتظمة υ باتجاه الاحداثي x في محور الإسناد s (المحاور المختبرية) كما موضح في الشكل (5 – 3 a). فعندما ينحل هذا الجسيم يتحول إلى جسيم مشحون آخر هو الميون (μ^+) الذي يصنع الزاوية θ مـــع الاحداثي x وإلى النيوترينو الميوني (ν_μ) الذي يصنع الزاوية φ مع الاحـــداثي x كما في الشكل (5 – 3 b).

و لمعالجة عملية الانحلال هذه ننقل الجسيم المنحل إلى محـــور الإســـناد `s (محاور مركز الكتلة) الذي يتحرك بسرعة منتظمة υ باتجاه الاحداثي x. فقـــوانين حفظ الزخم في هذا المحور تدل على أن الميون ينبعث باتجـــاه معـــاكس لاتجـــاه النيوترينو ويصنع كل منهما الزاوية α مع الاحداثي x وكما موضح في الشـــكل (5 – 4 b) بعد الانحلال. أما البايون فهو ساكن في محور الإسناد `s قبل الانحلال كما موضح في الشكل (5 – 4 a).

لنـــدرس الآن عمليـــة الانحـــلال فـــي محـــور الإســـناد `s و بأعتبـــار أن (m_ν, m_μ, m_π) هي الكتل الساكنة لكل من البايون والميون والنيوترينو على التوالي و أن $\varepsilon'_\nu, \varepsilon'_\mu, \varepsilon'_\pi$ الطاقة الكلية للبايون و الميـــون والنيوترينـــو علـــى التـــوالي.

ولنفرض أن زخم الميون يساوي p'_μ وزخم النيوترينو يساوي $\frac{\mathcal{E}'_\nu}{c}$. من قــوانين حفظ الزخم نكتب:

$$\vec{p}'_\mu + \vec{p}'_\nu = 0 \qquad (10\text{-}5)$$

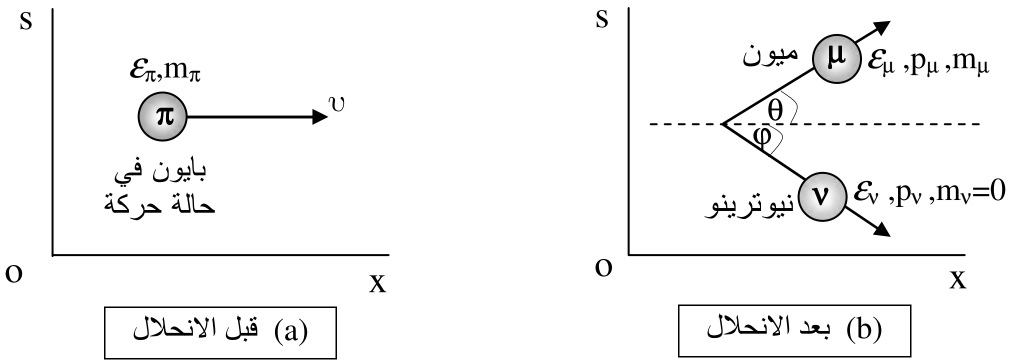
و من قوانين حفظ الطاقة:

$$\mathcal{E}'_\mu + \mathcal{E}'_\nu = \mathcal{E}'_\pi = m_\pi c^2 \qquad (11\text{-}5)$$

حيث أن:

$$\mathcal{E}'^2_\mu = p'^2_\mu c^2 + \left(m_\mu c^2\right)^2 \qquad (12\text{-}5)$$

$$\mathcal{E}'^2_\nu = p'^2_\nu c^2 + \left(m_\nu c^2\right)^2 \qquad (13\text{-}5)$$



الشكل (5- 3): (a) بايون في حالة حركة بسرعة υ قبل الانحلال. (b) يتولد الميون والنيوترينو بعد انحلال البايون.

من المعادلة (5 – 10) نحصل على:

$$c^2 p'^2_\mu = c^2 p'^2_\nu$$

و بالاستعانة بالعلاقتين (5 – 12)، (5 – 13) ينتج أن:

$$\mathcal{E}'^2_\mu - \left(m_\mu c^2\right)^2 = \mathcal{E}'^2_\nu - \left(m_\nu c^2\right)^2$$

$$\therefore \mathcal{E}'^2_\mu - \mathcal{E}'^2_\nu = \left(m^2_\mu - m^2_\nu\right)c^2 \qquad (14\text{-}5)$$

وبحل المعادلتين (5 – 11)، (5 – 14) آنياً نحصل على:

$$\mathcal{E}'_\mu = \frac{\left(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2\right)c^2}{2m_\pi} \qquad (15\text{-}5)$$

$$\mathcal{E}'_\nu = \frac{\left(m_\pi^2 + m_\nu^2 - m_\mu^2\right)c^2}{2m_\pi} \qquad (16\text{-}5)$$

نلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين تمثلان الطاقة الكلية لجسيم الميــون والنيوترينــو على التوالي في محور الإسناد `s الذي حدث فيه انحلال جسيم البايون و هو فــي حالة سكون.

من الممكن الآن حساب زخم كل من الميون p'_μ و النيوترينو p'_ν في محور الإسناد `s فنجد أن:

$$cp'_\mu = \sqrt{\mathcal{E}'^2_\mu - \left(m_\mu c^2\right)^2} \qquad (17\text{-}5)$$

$$cp'_\nu = \sqrt{\mathcal{E}'^2_\nu - \left(m_\nu c^2\right)^2} \qquad (18\text{-}5)$$

و بما أن:

$$\left.\begin{aligned} m_\pi c^2 &= 273.2\, m_e c^2 \\ m_\mu c^2 &= 206.8\, m_e c^2 \\ m_\nu c^2 &= 0 \\ m_e c^2 &= 0.511\,\text{MeV} \end{aligned}\right\}$$

يمكننا حساب الطاقة الحركية T'_μ للميون والطاقة الحركية T'_ν للنيوترينو وذلك بالاستعانة بالمعادلتين (5 – 15)، (5 – 16) فيكون:

$$T'_\nu = \mathcal{E}'_\nu - m_\nu c^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}'_\nu = 29.8\ \text{MeV}$$

$$\therefore T'_\mu = \mathcal{E}'_\mu - m_\mu c^2$$

$$= m_\pi c^2 - \mathcal{E}'_\nu - m_\mu c^2$$

$$\therefore T'_\mu = \left(m_\pi - m_\mu\right)c^2 - \mathcal{E}'_\nu$$

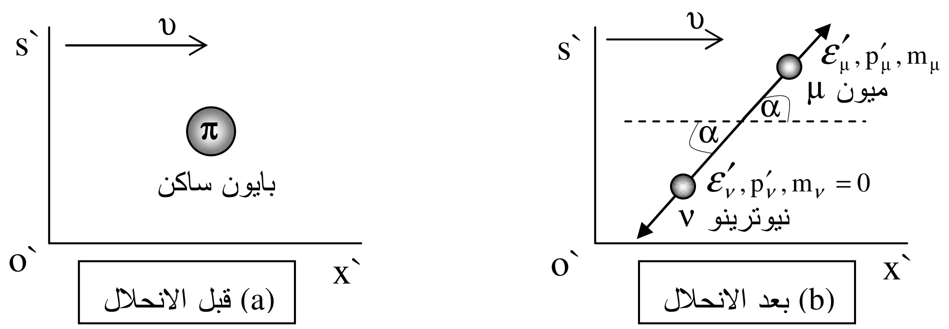
وبتعويض قيم كل من $m_\mu c^2, m_\pi c^2, \mathcal{E}'_\nu$ في المعادلـــة الأخيرة نحصل على:

$$T'_\mu = 4.1\,\text{MeV}$$

أما زخم كل من الجسيمين المتحررين بعد الانحـــلال فـــيمكن حســـابه باســـتخدام المعادلتين (5 – 17)، (5 – 18) فيكون:

$$p'_{\mu} = p'_{\nu} = 29.8\ \text{MeV/c}$$

إن الجسيم (π^+) ينحل خلال حركته كما هو موضح في الشكل (5 – 3)



الشكل (5 – 4): (a) البايون في حالة سكون قبل الانحلال. (b) بعد انحلال البايون يتولد الميون والنيوترينو باتجاهين متعاكسين وبزخمين متساويين بالمقدار.

إذن يمكن حساب الطاقة الكلية و الزخم لكل من الجسيمين المتحررين في محـــور الإسناد s (المحاور المختبرية) بعد الاستعانة بمعادلات التحويل للزخم و الطاقة من محور الأسناد `s إلى s و كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} p_{\mu}\cos\theta &= \gamma\left(p'_{\mu}\cos\alpha + \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal{E}'_{\mu}\right) \\ p_{\mu}\text{Sin}\theta &= p'_{\mu}\text{Sin}\alpha \\ \mathcal{E}_{\mu} &= \gamma\left(\mathcal{E}'_{\mu} + \upsilon p'_{\mu}\cos\alpha\right) \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}5)$$

إن الزاوية α التي يصنعها الجسيم (μ^+) مع الاحداثي `x أو جسيم النيوترينو فـــي محور الإسناد `s تعتبر عاملاً متغيراً يعود إلى نوع الانحلال. و من الجدير بالذكر أن هذا التحليل يصح بالنسبة لأنحلال أي جسيم غير مستقر إلى جسيمين آخرين.

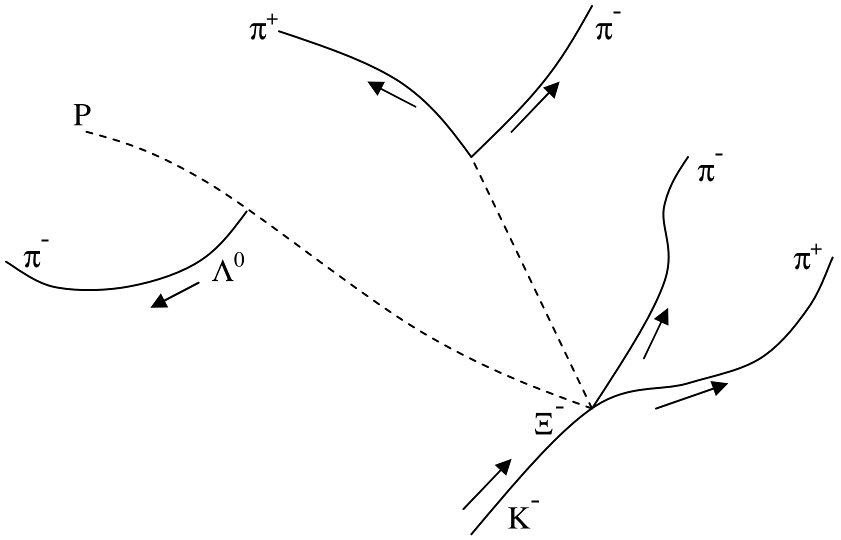
فاذا فرضنا أن m_0 الكتلة الساكنة للجسيم المنحل و أن m_{01} و m_{02} الكتلتـــان الساكنتان للجسيمين الوليدين من الانحلال، فـــان المعـــادلتين (5 – 15)، (5 – 16) على سبيل المثال تكتبان بالصيغتين التاليتين:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1' &= \frac{\left(m_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2\right)c^2}{2\,m_0} \\ \varepsilon_2' &= \frac{\left(m_0^2 + m_{02}^2 - m_{01}^2\right)c^2}{2\,m_0} \end{aligned}\right\} \qquad (20\text{-}5)$$

5 – 3 إنتاج الباريونات و الميزونات

لقد ظهرت اكتشافات جديدة عن طريق الصدفة، فعند قيام فريق من الباحثين بدراسة تطوير جوانب مختلفة تتعلق بأعمالهم قررت إحدى فرق البحوث قصـــف الهيدروجين في حجرة الفقاعة بواسطة الميزونات (K^-)، (الكايونات السالبة)، التي تم توليدها لهذا الغرض بواسطة معجل البيفاترون، والشكل (5– 5) يمثـــل إحـــدى الصور التي تم التقاطها لمعرفة الجسيمات المتكونة التي أمكن فصـــلها باســـتعمال سلسلة من المغانط و مميزات السرعة (مجالات كهربائية و مغناطيسية متقاطعة). إن حجرة الفقاعة وضعت في مجال مغناطيسي وأخذت صور مجســـمة للحـــوادث التي حصلت فيها، مما ساعد الباحثين على قياس الشحنة و الزخم لجميع الجسيمات التي تضمنتها الحادثة بدرجة مقبولة.

وينبغي أن نضيف في هذا المجال أن دراسة كثافة الفقاعات في حزمة علـــى مسار الجسيمات قد أعطى تقديراً تقريبياً لسرعة الجسيمات وساعد هذا على تمييز نوعية الجسيمات المتولدة . وتجدر الإشارة إلى أن هذا العمل تم فـــي مختبـــرات بروكهيفن وتبين أن هـــذه الجســـيمات تتكـــون مـــن الباريونـــات ($P, \overline{\Lambda}^0, \Xi^-$) والميزونات ($K^0, \pi^+, \pi^-$) والتي وضحت خصائصها في الجدول (5 – 1).



الشكل (5 – 5): عملية قصف الهيدروجين في حجرة الفقاعة بواسطة الكايونات السالبة وقد تم فصل الجسيمات المتكونة باستخدام مجالات كهربائية ومغناطيسية.

ولمناقشة إنتاج الجسيمات الأولية على ضوء النظرية النسبية الخاصة سنوضح كيفية توليد ميزونات من نوع π^+ مشحونة بشحنة موجبة بقصف ذرات الهيدروجين كهدف ساكن بواسطة بروتونات عالية الطاقة. و تكتب عملية التفاعل كالآتي:

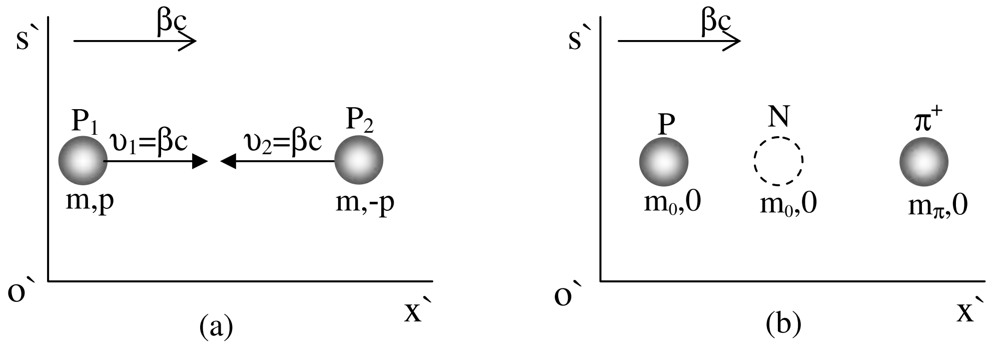
$$P_1 + P_2 \rightarrow P + N + \pi^+$$

البروتونان المتصادمان P_2,P_1 ينتج عنهما بروتون P ونيوترون N وبايون π^+ كما موضح أعلاه. وبما أن البروتون و النيوترون لهما الكتلة الساكنة نفسها تقريباً فان طاقة السكون المطلوبة هي تلك العائدة للبايون وتساوي 140MeV.

ولكن إذا اعتبرنا البروتون P_2 هو الهدف والذي يكون في حالة سكون وأن البروتون الساقط P_1 له زخم كبير، فان طاقة حركية كبيرة قد تُبّدد لإعطاء حركة للبروتون الساكن لذا لا يمكن استخدامها لتوليد جسيمات جديدة.

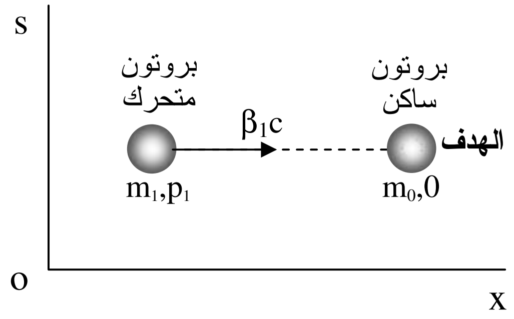
أما لو فرضنا أن P_1 و P_2 يمكن اعتبارهما جسيمين يتصادمان بزخمين متساويين في المقدار و متعاكسين في الاتجاه فان الطاقة الحركية خلال التصادم تستخدم باجمعها لتوليد الجسيمات المطلوبة.

إن عملية توليد حزم من جسيمات متصادمة في اتجاهين متعاكسين تعتبر أصعب من الناحية العملية (التقنية) من أن تستخدم حزمة واحدة من الجسيمات تضرب هدفاً ساكناً.



الشكل (5 – 6): (a) بروتونان يتحركان باتجاهين متعاكسين. الزخم الكلي قبل التفاعل يساوي صفراً. (b) ثلاثة جسيمات في حالة سكون تم توليدها بعد عملية التفاعل.

لنعتبر الآن بروتونين يسيران باتجاهين متعاكسين في محور الإسناد `s، حيث يكون الزخم الكلي خلال عملية التصادم يساوي صفراً لاحظ الشكل (5 – 6 a). وإذا فرضنا أن سرعة كل من البروتونين في حالة تصادم تساوي $\beta c$ بالمقدار فان سرعة محور الإسناد `s باتجاه الاحداثي x الموجب يجب أن تكون مساوية إلى βc نسبة إلى محور الإسناد s الذي يُشاهد فيه أحد البروتونين في حالة سكون و يعتبر الهدف، والآخر يتحرك نحوه بسرعة ثابتة تساوي $\beta_1 c$ و كما موضح في الشكل (5 – 7).



الشكل (5 - 7): بروتون يتحرك نحو آخر مماثل في حالة سكون ويعتبر الهدف في s.

يلاحظ في محور الإسناد `s، بعد التصادم أن الجسيمات المتولدة جميعها في حالة سكون الشكل (b 6 – 5). و هي حالة يكون فيها تبديد الطاقة أقل ما يمكن لتوليد هذا النوع من الجسيمات و لأنه لا تتولد طاقة حركية لا تصرف للغرض نفسه.

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة في محور الإسناد `s فيكون:

$$\mathcal{E} = 2\,mc^2 = 2\,m_0c^2 + m_\pi c^2 \qquad (21\text{-}5)$$

حيث أن $\mathcal{E}$ تمثل الطاقة الكلية للنظام و أن m_0 كتلة السكون لأي من البروتون أو النيوترون بغض النظر عن الاختلاف الطفيف في الكتلة و أن m_π كتلة السكون للبايون المشحون.

وبقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على $2m_0c^2$ نجد أن:

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{m_\pi}{2\,m_0} \qquad (22\text{-}5)$$

وبما أن:

$$m_\pi = 273 m_e$$
$$m_0 = 1836 m_e$$

حيث أن m_e الكتلة الساكنة للإلكترون فان:

$$\frac{m}{m_0} = 1.074$$

أو

$$\frac{m_0}{m} = 0.93$$

فيمكن إذن استخدام هذه القيمة الأخيرة لمعرفة وتثبيت السرعة β لكل من البروتونين المتصادمين في محور الإسناد `s (محاور مركز الكتلة).

$$\because \frac{m}{m_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$\therefore \beta^2 = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 0.135$$

$$\therefore \beta = 0.37$$

و إذا كان البروتون p_2 ساكناً في محور الإسناد s (المحاور المختبرية) فان محور الإسناد `s يجب أن يتحرك بسرعة β نسبة لمحور الإسناد s كما ذكرنا سابقاً.

وهكذا نجد أن البروتون p_1 ستكون له سرعة β_1 في محور الإسناد s فيما كانت له سرعة مساوية إلى β في محور الإسناد `s. و باستخدام تحويل السُرع من `s إلى s نجد أن:

$$\beta_1 = \frac{\beta + \beta}{1+\beta^2} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} = 0.65$$

و من هذا نحصل على:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \beta_1^2\right)}}$$

إذن الطاقة الحركية T اللازمة لتوليد البايون π^+ تكون مساوية إلى:

$$\begin{aligned} T &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{\left(1-\beta_1^2\right)}} - m_0c^2 \\ &= 0.31\, m_0c^2 \end{aligned}$$

و بما أن:

$$m_0c^2 = 938 \ \ \text{MeV}$$
$$\therefore\ T = 290 \ \ \text{MeV}$$

و هي أقل طاقة ممكنة لحدوث مثل هذا التفاعل. وهذه الطاقة أكبر قليلاً من ضعف طاقة السكون العائدة للبايون. إن هذه الطاقة المحسوبة لتوليد البايون تسمى طاقة العتبة اللازمة لعملية التفاعل، فأية طاقة أقل من هذه القيمة تكون غير كافية لإنتاج مثل هذا النوع من الجسيمات، لذلك تستخدم بروتونات طاقتها أعلى بكثير من طاقة العتبة لضمان التفاعل.

5 – 4 إنتاج بروتون الضد

لقد تم توليد بروتون الضد و الكشف عنه باستخدام معجل البيفاترون في جامعة كاليفورنيا في بيركلي عام 1955. و قبل هذا التاريخ و من خلال دراسة دقيقة لبعض تفاعلات الأشعة الكونية تم الحصول على أدلة قوية على وجود بروتون الضد.

ولكن تجربة البيفاترون تعد مع ذلك أكثر إقناعاً لتوليد هذا الجسيم. وسنوضح في نهاية هذا البند كيفية استخدام محاور الإسناد في النظرية النسبية الخاصة لحساب طاقة العتبة اللازمة لإنتاج هذا الجسيم.

إن نتائج شامبرلن وجماعته قد دلت على أن هناك جسيماً سالباً كتلته تساوي كتلة البروتون يتواجد ضمن حوالي 40000 ميزون نوع π^- تم تسجيله. و بعد إجراء قياسات تقريبية لكتلة الجسيم تبين وبصورة مقنعة أن كتلة هذا الجسيم السالب الذي تم اكتشافه قريبة جداً من كتلة البروتون. إن الجسيم الوحيد الذي كان معروفاً سابقاً و له هذه المواصفات هو أيون الهيدروجين السالب ولكن هذا الاحتمال ثبت أنه ليس وارداً في مثل هذه الحالات ذلك لأن احتمال اقتناص البروتون للإلكترون يكون ضعيفاً بهذه السرعة وأن بقاء الإلكترون معه خلال مروره بجميع العدادات يكون صغيراً جداً. لقد قام شامبرلن بقياس دالة تهيج الجسيم الجديد كاختبار أخير أي قياس عدد الجسيمات المتولدة خلال فترة زمنية بدلالة طاقة البيفاترون. ومن نتائج القياسات وجد أن دالة التهيج تقترب من الصفر عند حوالي 4.3GeV كما هو متوقع. و من هذا نستنتج أن هذه الدالة يجب أن تكون مرتبطة ببروتون الضد. أما عملية الإفناء التي لوحظت لبروتون الضد فهي حسب التفاعل الآتي:

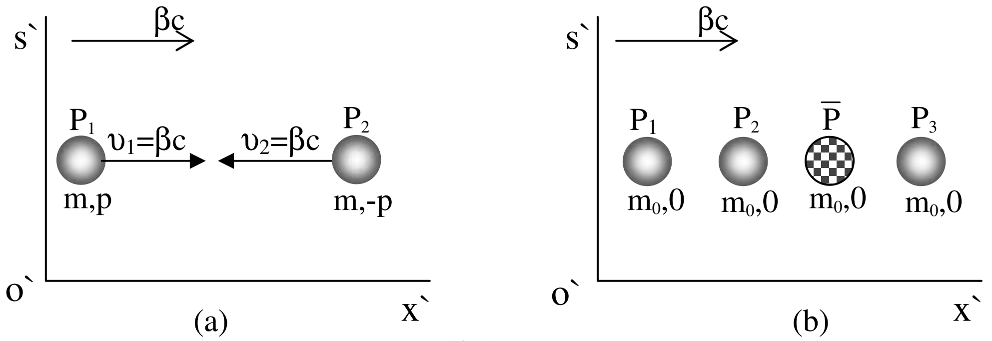
$$P + \overline{P} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^- + x\pi^0$$

ويتم انحلال البايونات بعد ذلك في عدة خطوات بحيث تكون النتيجة النهائية أشعة جاما و إلكترونات و بوزيترونات و هذه تتحول بالتالي خلال المادة إلى طاقة حرارية و كيميائية.

سبق أن أوضحنا أن بروتون الضد لا يمكن إنتاجه ما لم يتولد معه بروتون إضافي بخصائصه الاعتيادية. من الممكن إنتاج بروتون – بروتون الضد بواسطة التصادم بين بروتونين حسب التفاعل الآتي:

$$P_1 + P_2 \rightarrow P_1 + P_2 + \overline{P} + P_3$$

إذ أن $\overline{P}$ بروتون الضد و P_3 البروتون الإضافي الاعتيادي.



الشكل (5 – 8): (a) بروتونان يتحركان باتجاهين متعاكسين. الزخم الكلي قبل التفاعل يساوي صفراً. (b) أربعة جسيمات في حالة سكون بعد عملية التفاعل مع بقاء الزخم الكلي محفوظاً.

ان الطريقة لإنتاج هذا النوع من التفاعل مشابهة لتلك المتخذة في إنتاج البايون أي في الحالة التي تكون فيها جميع الجسيمات في حالة سكون بعد التفاعل في محاور إسناد معينة. هذه المحاور هي محاور مركز الكتلة. الشكل (5 – 8) يبين عملية التصادم في محور الإسناد `s حيث يكون الزخم الكلي مساوياً صفراً، إن الطاقة الكلية في هذا المحور ينبغي أن تكون مساوية إلى أو أكبر من طاقة السكون للنيوكلونات(*) الأربعة. إذن عند طاقة العتبة يحصل أن:

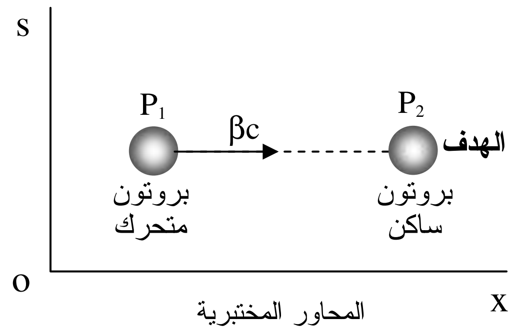
$$\mathcal{E} = 2\,mc^2 = 4\,m_0c^2$$

$$\therefore\ \frac{m}{m_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)}} = 2$$

$$\therefore\ \beta^2 = \frac{3}{4}$$

و إذا فرضنا مرة أخرى أن P_2 هو البروتون الهدف في حالة سكون في محور الإسناد s فان السرعة اللازمة للبروتون الساقط p_1 في محور الإسناد نفسه تساوي: [لاحظ الشكل (5 – 9)]

(*) يطلق على البروتونات والنيترونات داخل النواة بالنيوكلونات.



الشكل (5 - 9): بروتونان أحدهما ساكن هو الهدف والآخر يتحرك نحوه في s.

$$\beta_1 = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\gamma_1^2} = 1-\beta_1^2 = 1-\frac{4\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2} = \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = 7$$

إذن البروتون المصطدم P_1 يجب أن تكون طاقته الكلية مساوية إلى $\mathcal{E}_1$ حيث أن:

$$\mathcal{E}_1 = \gamma_1 m_0 c^2 = 7\, m_0 c^2$$

وطاقته الحركية T_1 مساوية إلى:

$$T_1 = \gamma_1 m_0 c^2 - m_0 c^2 = 6\, m_0 c^2$$

$$\because m_0 c^2 = 0.938\,\text{GeV}$$

إذن تكون الطاقة الحركية للبروتون الساقط مساوية إلى:

$$T_1 = 5.62\ \text{GeV}$$

و بهذه الطريقة تمكنت بعض الجامعات و هي جامعة بيركلي كما ذكرنا سابقاً أن تحصل على بروتونات معجلة بطاقة حركية تساوي 6GeV، أي أعلى بقليل من طاقة العتبة اللازمة لحدوث التفاعل.

5 – 5 إنتاج الزوج بواسطة الفوتونات

من الممكن إنتاج الزوج من إلكترون وبوزيترون بواسطة فوتونـــات عاليـــة الطاقة. ويلاحظ أن الإلكترون والبوزيترون يمتلكان الطاقة نفسها عنـــد توليـــدهما سوية. فهل نتصور الآن أن الفوتون بنفسه يتحول آنياً إلى إلكترون وبـــوزيترون، هذا مستحيل لأنه والحالة هذه لا يكون الزخم محفوظـــاً . نســـتنتج إذن أن هنـــاك جسيماً آخر قد يكون إلكترونا و الأكثر احتمالاً أن يكون نواة ذرية. فإذا فرضنا أن الجسيم الرابع المتولد هو نواة فالحسابات تكون سهلة عند تطبيـــق قـــوانين حفـــظ الزخم والطاقة، ولان كتلة النواة كبيرة فانها تكتسب زخماً كبيراً دون أن تمـــتص طاقة عالية من الفوتونات الساقطة المسببة لتوليدها.

وبالاعتماد على النتائج الخاصة بقوانين نيوتن للحركة نجد أن الطاقـــة الحركيـــة لجسيم كتلته m تساوي $\frac{P^2}{2m}$ إذ أن p الزخم الخطي للجسيم. لذا يمكن جعل هـــذه الطاقة صغيرة إذا أصبحت m كبيرة. وهكذا يصح القول أن معظم طاقة الفوتـــون تنتقل إلى كل من الإلكترون و البوزيترون بينما تعمل النواة على تـــوازن الـــزخم الخطي خلال عملية التصادم.

لقد لوحظ عملياً أن هذا النوع من إنتاج الزوج بواسطة فوتونات عالية الطاقـــة لا يقتصر فقط على الإلكترونات رغم أن أقل طاقة يحملها الفوتون لانتاج أي شـــيء آخر هو أعلى بكثير من طاقة العتبـــة (1.022 MeV) اللازمـــة لإنتـــاج الـــزوج الكترون- بوزيترون، و عملية التفاعل تكتب بالشكل:

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن هناك عملية أخرى يمكن اعتبارها عكس عملية إنتـــاج الزوج - وهي التفاعل المتبادل بين جسيم و جسيم الضد له، ثم الانحـــلال لإنتـــاج طاقة مشعة. فالبوزيترون والإلكترون عند تفاعلهما يولدان زوجاً مـــن الفوتونـــات وليس فوتوناً واحداً لبقاء الزخم محفوظاً. وعملية التفاعل تكون كالآتي:

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma$$

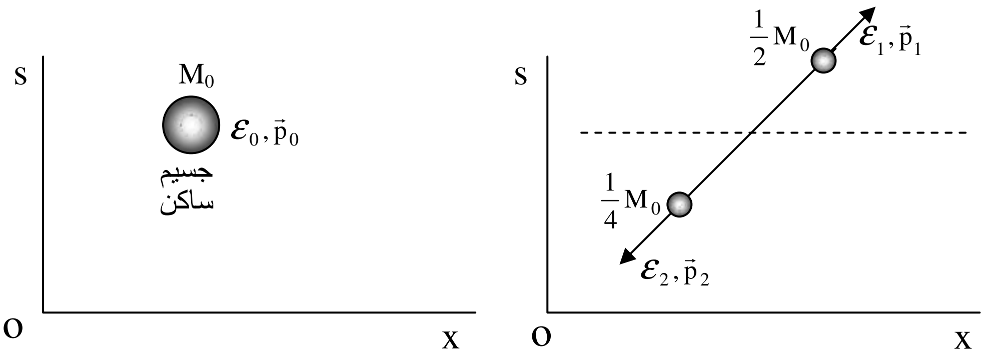
إن مطياف إنتاج الأزواج يعمل على أساس الكشف عن الإلكترون e^{-} والبوزيترون e^{+} اللذين يتولدان في الوقت نفسه. إن عملية التولد تتم في الصفيحة المعدنية التي تسمى المشع والتي تسقط عليها أشعة جاما بزاوية تساوي 90°. يوجد هذا المشع داخل حجرة مفرغة من الهواء ومحصورة بين قطبي مغناطيس كهربائي. يحاول كل من الجسيمين لحظة توليد الأزواج الخروج عادة في الاتجاه الأمامي وبذلك ينحرفان بواسطة المجال المغناطيسي فيتحرك أحدهما نحو اليسار والآخر نحو اليمين نتيجة شحنتيهما المختلفتين. وبما أن الطاقة الكلية لأشعة جاما في عملية توليد الأزواج تتحول إلى طاقة الكتلة الساكنة و طاقة حركية للجسيمين ولأن طاقة السكون لكل من الإلكترون و البوزيترون هي (0.511MeV) لذا فان الطاقة التي تمتلكها أشعة جاما يجب أن لا تقل عن (1.022MeV) كما ذكرنا سابقاً.

أمثلة محلولة:

المثال (1):

جسيم كتلته M_0 في حالة سكون ينحل إلى جسيمين، الكتلة الساكنة لاحدهما $1/2M_0$ و للأخر $1/4M_0$ و كما موضح بالشكل (5−10). أحسب الطاقة الحركية لكل منهما.

الحل:



الشكل (5- 10): انحلال جسيم في حالة سكون إلى جسيمين باتجاهين متعاكسين حيث يكون الزخم الكلي مساوياً صفراً خلال عملية الانحلال.

نطبق أولاً قانون حفظ الطاقة فنحصل على:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 = M_0c^2 \qquad (1)$$

نطبق قانون حفظ الزخم فنحصل على:

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{P}_0 = 0$$

أو:

$$c^2P_1^2 = c^2P_2^2 \qquad (2)$$

و لأن الزخمين للجسيمين المتحررين متساويان بالمقدار يكون:

$$\varepsilon_1^{\ 2} - \left(\frac{1}{2}M_0c^2\right)^2 = \varepsilon_2^{\ 2} - \left(\frac{1}{4}M_0c^2\right)^2$$

$$\therefore\ \varepsilon_1^{\ 2} - \varepsilon_2^{\ 2} = \frac{3}{16}M_0c^2 \qquad (3)$$

و بحل المعادلتين (1)، (3) آنياً ينتج:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{19}{32} M_0 c^2$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{13}{32} M_0 c^2$$

$$T_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{1}{2} M_0 c^2$$

$$= \frac{19}{32} M_0 c^2 - \frac{1}{2} M_0 c^2$$

$$\therefore T_1 = \frac{3}{32} M_0 c^2$$

$$T_2 = \mathcal{E}_2 - \frac{1}{4} M_0 c^2$$

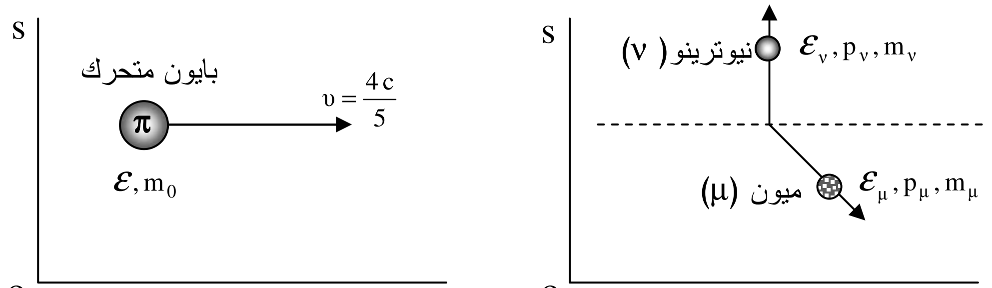
$$= \frac{13}{32} M_0 c^2 - \frac{1}{4} M_0 c^2$$

$$\therefore T_2 = \frac{5}{32} M_0 c^2$$

المثال (2):

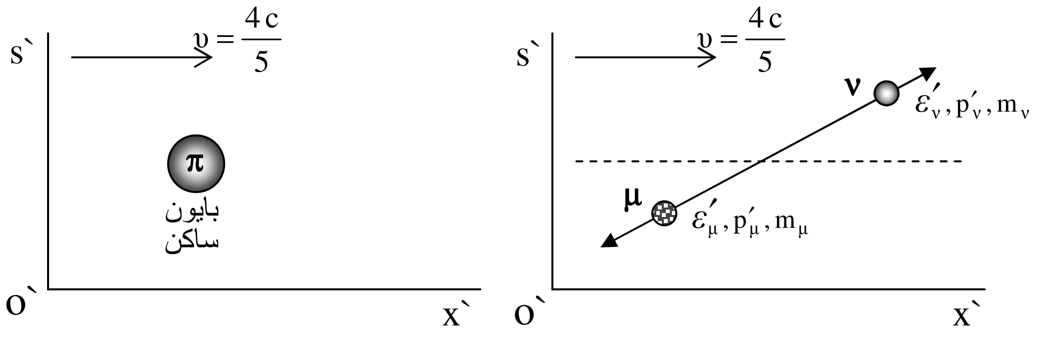
بايون π كتلته الساكنة m_0، يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب في محور الإسناد s بسرعة تساوي $\frac{4c}{5}$ انحل إلى ميون μ كتلته الساكنة $\frac{3}{4}m_0$ ونيوترينو ν. لوحظ أن النيوترينو يتحرك بعد الانحلال باتجاه الاحداثي y الموجب. أحسب طاقة النيوترينو في محور الإسناد s.

الحل:



الشكل (5- 11 a): عملية انحلال بايون في حالة حركة في محور الإسناد s إلى ميون ونيوترينو، حيث تبقى الطاقة الكلية محفوظة والزخم الكلي محفوظاً.

ندرس أولاً عملية الانحلال في محور الاسناد `s حيث يُشاهد البايون في حالة سكون، لاحظ الشكل (5 – b11)، و يكون الزخم الكلي يساوي صفراً خلال عملية الانحلال.



الشكل (5- 11 b): انحلال بايون في حالة سكون في محور الإسناد `s الى ميون ونيوترينو باتجاهين متعاكسين وبزخمين متساويين في المقدار حيث يبقي الزخم الكلي للنظام مساوياً صفراً.

$$\therefore \varepsilon'_v = \frac{\left(m_0^2 + m_v^2 - m_\mu^2\right)c^2}{2m_0} = \frac{\left(m_0^2 - \frac{9m_0^2}{16}\right)c^2}{2m_0}$$

$$\therefore \varepsilon'_v = \frac{7}{32}m_0c^2$$

و باستخدام معادلات تحويل الطاقة و الزخم فان:

$$\varepsilon'_v = \gamma\left(\varepsilon_v - \upsilon p_x\right) = \gamma\,\varepsilon_v$$

حيث أن $p_x=0$ للنيوترينو، لأن $P_v=P_y$ كما موضح في الشكل (5 – 11 a).

وبما أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)}} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{7}{32}m_0c^2 = \left(\frac{5}{3}\right)\varepsilon_v$$

$$\therefore \varepsilon_v = \frac{21}{160}m_0c^2$$

المثال (3):

ميزون نوع K في حالة حركة في محور الإسناد s ينحل إلى ميزونين نوع π. فإذا علمت أن أحد الميزونين في حالة حركة والآخر في حالة سكون بعد الانحلال فما هي الطاقة الحركية للميزون المتولد π. علماً بأن طاقة السكون لميزون K تساوي 494MeV و لميزون π تساوي 137MeV.

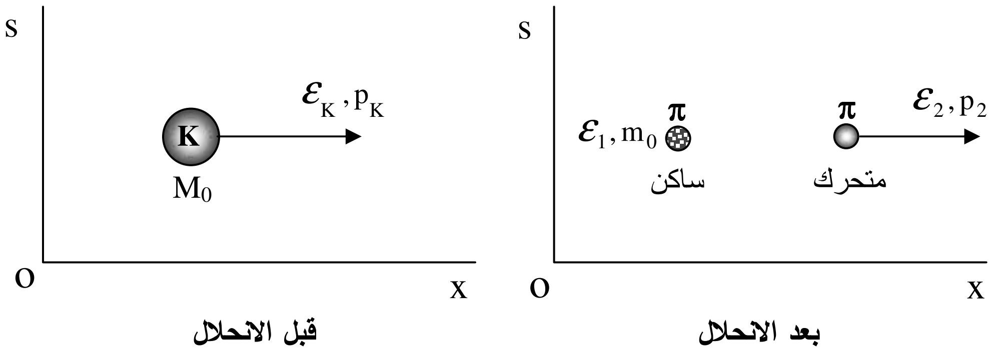
الحل:

نطبق أولاً قانون حفظ الطاقة فيكون:

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = m_0c^2 + m_2c^2$$

$$\therefore\ T_K + M_0c^2 = m_0c^2 + T_2 + m_0c^2$$

إذ أن m_0 الكتلة الساكنة لكل من الميزونين المتحررين و أن M_0 الكتلة الساكنة لميزون K، أما T_2 و T_K فهما الطاقة الحركية لميزون π و ميزون K على التوالي.



الشكل (5- 12): ميزون نوع K يتحرك باتجاه الاحداثي x قبل الانحلال في محور الإسناد s. يتولد بعد الانحلال ميزونان نوع π أحدهما في حالة سكون والآخر في حالة حركة.

و من قانون حفظ الزخم نجد أن:

$P_K=P_2$، لاحظ الشكل (5 – 12)

$$\therefore T_K - T_2 = 2m_0c^2 - M_0c^2 \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}_K - \mathcal{E}_2 = m_0c^2 \qquad (2)$$

$$\varepsilon_K^2 - (M_0c^2)^2 = \varepsilon_2^2 - (m_0c^2)^2 \qquad (3)$$

و من هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\varepsilon_K^2 - \varepsilon_2^2 = (M_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2 \qquad (4)$$

وبقسمة (4) على (2) يحصل:

$$\varepsilon_k + \varepsilon_2 = \left(\frac{M_0}{m_0}\right) M_0c^2 - m_0c^2 \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (2)، (5) ينتج:

$$\mathcal{E}_2 = 753\,\text{MeV}$$

$$\mathcal{E}_K = 890\,\text{MeV}$$

$$\therefore T_K = \mathcal{E}_K - M_0c^2 = 890\,\text{MeV} - 494\,\text{MeV}$$

$$\boxed{\therefore T_K = 396\,\text{MeV}}$$

$$T_2 = \varepsilon_2 - m_0c^2 = 753\,\text{MeV} - 137\,\text{MeV}$$

$$\boxed{\therefore T_2 = 616\,\text{MeV}}$$

المثال (4):

تم توليد الزوج إلكترون– بوزيترون باستخدام أشعة γ عند توجيهها على إلكترون ساكن، حسب عملية التفاعل الآتية:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

ما هي أقل طاقة تحملها أشعة γ لجعل هذه العملية ممكنة الحدوث؟

الحل:

في محور الإسناد `s الذي يكون فيه الزخم الكلي للنظام قبل وبعد التصادم يساوي صفراً يحصل أن جميع الجسيمات المتولدة في حالة سكون كي تكون طاقة الأشعة الساقطة المسببة لهذا التفاعل أقل ما يمكن.

نطبق قانون حفظ الطاقة في محور الإسناد `s فنحصل على:

$$\mathcal{E}' + \gamma m_0c^2 = 3\,m_0c^2 \qquad (1)$$

حيث أن m_0 الكتلة الساكنة للإلكترون والبوزيترون المتولد و أن $\mathcal{E}$` طاقة أشعة γ. أما المقدار γ في المعادلة (1) فيساوي:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$، حيث β=υ/c و υ السرعة النسبية بين محوري الإسناد s، `s و تساوي سرعة الإلكترون قبل التصادم في `s.

و من قانون حفظ الزخم نجد أن:

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} - \gamma\beta m_0 c = 0 \qquad (2)$$

ومن العلاقتين (1)، (2) يكون:

$$\gamma\beta m_0 c^2 + \gamma m_0 c^2 = 3\, m_0 c^2$$
$$\therefore \gamma(1+\beta) = 3$$
$$\therefore 1+\beta = 3\sqrt{(1-\beta^2)}$$

و بحل هذه العلاقة الأخيرة ينتج أن:

$$\beta = \frac{4}{5}$$
$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \frac{5}{3}$$

و باستخدام معادلات تحويل الزخم والطاقة من `s إلى s نحصل على:

$$\mathcal{E} = \gamma\varepsilon'(1+\beta) = \gamma^2\beta(1+\beta)\, m_0 c^2$$
$$\therefore \mathcal{E} = \left(\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)\left(1+\frac{4}{5}\right) m_0 c^2$$
$$\mathcal{E} = 4\, m_0 c^2$$

و بما أن طاقة السكون للإلكترون تساوي 0.511MeV

$$\boxed{\therefore \mathcal{E} = 2.044\,\text{MeV}}$$

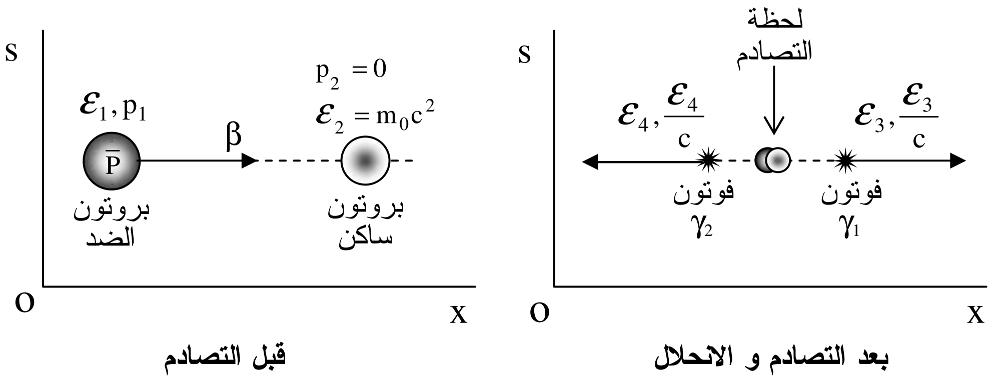
المثال (5):

بروتون الضد $\overline{P}$ يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب و بطاقة حركية تساوي 2/3GeV، يضرب بروتوناً P كان في حالة سكون في محور الإسناد s.

خلال عملية التفاعل يحصل انحـــلال فيتولـــد فوتونـــان $(\bar{p}+p \rightarrow \gamma_1+\gamma_2)$ أحدهما يسير باتجاه الاحداثي x السالب و الآخر باتجاه الاحداثي x الموجب. فإذا علمت أن طاقة السكون لكل مـــن البروتـــون P وبروتـــون الضـــد $\bar{P}$ تساوي 1GeV.

<u>أولاً:</u> ما طاقة كل من الفوتونين المتحررين؟

<u>ثانياً:</u> بأي اتجاه يتحرك كل منهما؟



الشكل (5- 13): برتون الضد يتحرك نحو بروتون ساكن في محور الإسناد s قبل التصادم. بعد التصادم يتولد فوتونان باتجاهين متعاكسين.

الحل:

الشكل (5-13) ، قبل عملية الانحلال، يوضح بروتون الضد بطاقة $\mathcal{E}_1$ وزخم p_1 يتحرك بسرعة β نحو بروتون ساكن طاقته $\mathcal{E}_2$. بعد عملية الانحلال يتولد فوتونان الأول γ_1 بطاقة $\mathcal{E}_3$ و زخم $\mathcal{E}_3/c$ متحرك نحو اليمين والثاني γ_2 بطاقة $\mathcal{E}_4$ وزخم $\mathcal{E}_4/c$ متحرك بالفرض نحو اليسار كما موضح في الشكل أعلاه.

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة فيكون:

$$\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = T_1 + 2m_0c^2 \qquad (1)$$

حيث أن m_0 طاقة السكون لكل من البروتـــون و بروتـــون الضـــد و أن T_1 الطاقة الحركية لبروتون الضد.

و بتطبيق قانون حفظ الزخم نكتب:

$$\frac{\mathcal{E}_3}{c} - \frac{\mathcal{E}_4}{c} = \gamma\beta m_0 c = p_1 \qquad (2)$$

حيث أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 = \gamma\beta m_0 c^2 = cp_1 \qquad (3)$$

$$\mathcal{E}_1^2 = (cp_1)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\because T_1 = \frac{2}{3}\text{GeV}$$

$$\therefore \mathcal{E}_1 = T_1 + m_0 c^2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}\text{GeV}$$

$$\therefore cp_1 = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - (1)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 = \frac{4}{3} \qquad (4)$$

وبحل المعادلتين (1)، (4) نحصل على:

$$\mathcal{E}_3 = 2\,\text{GeV}$$

$$\mathcal{E}_4 = \frac{2}{3}\text{GeV}$$

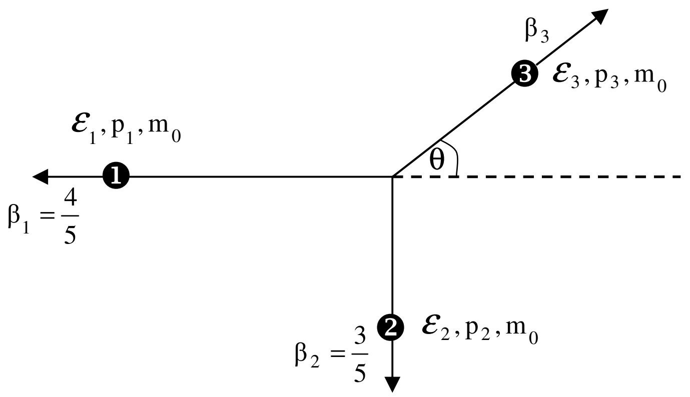
أي أن الفوتون γ_1 يتحرك نحو اليمين و الفوتون γ_2 يتحرك نحو اليسار باتجاه الأحداثي x، بعد أن فرضنا أن بروتون الضد يتحرك بزخم p_1 باتجاه الأحداثي x الموجب.

المثال (6):

جسيم كتلته الساكنة M_0 في حالة سكون، ينحل إلى ثلاثة جسيمات متماثلة الكتلة الساكنة لكل جسيم m_o. اثنان منها المؤشران بعلامة ❶ و ❷ يمتلكان سرعةً واتجاهاً كما هو موضح في الشكل أدناه.

أولاً: احسب اتجاه وسرعة الجسيم ❸. ثانياً: جد النسبة M_0/m_0.

الحل:



الشكل (5-14): جسيم في حالة سكون ينحل الى ثلاثة جسيمات متماثلة، اثنان متعامدان والثالث ينحرف عنهما بزاوية θ.

بالاستعانة بالشكل (5-14) من الممكن تطبيق قانون حفظ الزخم.

$$\therefore p_3 \sin\theta = p_2 \qquad (1)$$

$$p_3 \cos\theta = p_1 \qquad (2)$$

حيث أن θ زاوية انحراف الجسيم ❸ عن الاحداثي x وأن:

$$P_1 = \gamma_1\beta_1 m_0 c \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta_1^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} = \frac{5}{3}$$

$$P_2 = \gamma_2\beta_2 m_0 c \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta_2^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}$$

$$P_3 = \gamma_3\beta_3 m_0 c \quad \Rightarrow \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta_3^2\right)}}$$

بقسمة المعادلة (1) على (2) ينتج:

$$\tan\theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma_2\beta_2}{\gamma_1\beta_1} = \frac{(5/4)(3/5)}{(5/3)(4/5)} = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin\theta = 0.49$$

$$\therefore \theta = 29.34^{o}$$

ومن المعادلة (1) نحصل على:

$$p_3 = \gamma_3\beta_3 m_0 c = \frac{\gamma_2\beta_2 m_0 c}{\sin\theta}$$

$$\therefore \gamma_3\beta_3 = \frac{\gamma_2\beta_2}{\sin\theta} = \frac{(5/4)(3/5)}{(0.49)} = 1.53$$

$$\therefore \gamma_3^2\beta_3^2 = \gamma_3^2 - 1 = (1.53)^2$$

$$\therefore \gamma_3 = 1.83 \qquad \Rightarrow \beta_3 = \frac{\upsilon_3}{c} = \frac{1.53}{1.83} = 0.48$$

$$\therefore \upsilon_3 = 0.84c$$

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة:

$$M_0 c^2 = \gamma_1 m_0 c^2 + \gamma_2 m_0 c^2 + \gamma_3 m_0 c^2$$

$$\therefore \frac{M_0}{m_0} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + 1.83$$

$$\therefore \frac{M_0}{m_0} \cong 4.75$$

المثال (7):

ميزون π^0 طاقته الحركية 1GeV ينحل إلى شُعاعي جاما، فإذا علمت أن طاقة الكتلة الساكنة للميزون هي 135 MeV فما هي الزاوية المحصورة بين شعاعي جاما (بفرض أنهما انبعثا باتجاهين يعملان زاويتين متساويتين مع الاتجاه الأصلي للميزون)؟

الحل:

نفرض أن $\mathcal{E}$ الطاقة الكلية للميزون وأن T طاقته الحركية وأن m_0c^2 طاقة الكتلة الساكنة للميزون. و كذلك نفرض أن ε_1, ε_2 طاقة شُعاعي جاما المتولدين من عملية الانحلال وأن $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ زخماهما وأن $\vec{p}$ زخم جسيم الميزون.

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة فيكون:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = T + m_0c^2$$
$$= 1 + 0.135$$
$$\therefore \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 1.135\text{GeV} \qquad (1)$$

بما أن الشُعاعين يصنعان زاويتين متساويتين مع الاتجاه الأصلي للميــزون نستنتج أن: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ و $p_1 = p_2$ بالمقدار

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta$$

إذ أن θ الزاوية المحصورة بين الشعاعين.

$$\therefore p^2 = 2p_1^2(1+\cos\theta) = 4p_1^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{p^2}{4p_1^2}$$

$$\because p^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - (m_0c)^2$$

$$p_1^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}\right)^2 = \left(\frac{0.5675}{c}\right)^2$$

$$\therefore \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{\mathcal{E}^2 - (m_0c^2)^2}{4\mathcal{E}_1^2} = \frac{1.27}{(4)(0.5675)^2}$$

$$\therefore \cos^2\frac{\theta}{2} = 0.9858 \qquad \Rightarrow \theta \cong 14^\circ$$

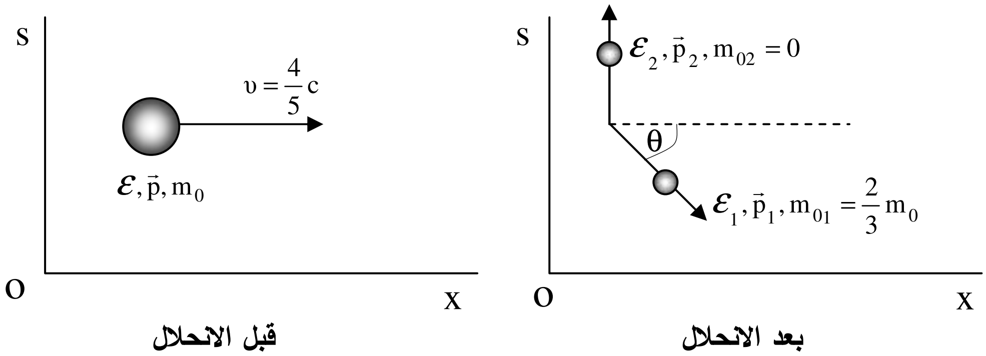
المثال (8):

جسيم مشحون كتلته الساكنة m_0 يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب بسرعة تساوي $\frac{4c}{5}$، ينحل إلى جسيمين أحدهما مشحون كتلتــه الســاكنة تســاوي $m_{01} = \frac{2}{3}m_0$ والآخر كتلته الساكنة $m_{02}=0$ ولوحظ أن هذا الجسيم يتحرك بعد الانحلال باتجاه الاحداثي y الموجب. جد الزاوية التي يصنعها اتجاه الجسيم المشحون، واحسب الطاقة الحركية للجسيم الآخر.

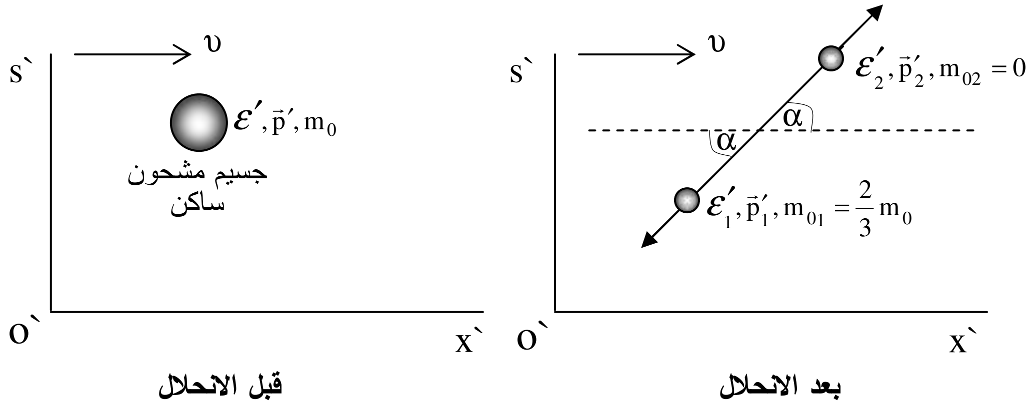
الحل:

من الممكن الاستعانة بالمحاور المختبرية (محاور الإسناد s) ومحاور مركز الكتلة (محاور الإسناد `s) حيث يُشاهد الجسيم المشحون في حالة سكون قبل عملية الانحلال، ويكون الزخم الكلي للنظام مساوياً صفراً.

لاحظ الشكل(5 –15) الذي يمثل محاور الإسناد s والشكل (5 – 16) الذي يمثل محاور الإسناد `s.



الشكل (5- 15): جسيم يتحرك بسرعة ثابتة في s وينحل إلى جسيمين أحدهما عمودي على x والآخر منحرف عنه بزاوية θ.



الشكل (5- 16): الجسيم في حالة سكون في `s قبل الانحلال ثم ينحل الى جسيمين حيث يبقي الزخم الكلي محفوظاً.

نطبق الآن قانون حفظ الطاقة في محور الإسناد `s فيكون:

$$\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = m_0 c^2 \qquad (1)$$

ومن قانون حفظ الزخم:

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}' = 0 \qquad (2)$$

و من المعادلة (2) نكتب:

$$(cp'_1)^2 = (cp'_2)^2 \qquad (3)$$

وبما أن: $\mathcal{E} = c\sqrt{(p)^2 + (m_0 c)^2}$ ، لذا يكون:

$$\mathcal{E}'^2_1 - \left(\frac{2}{3} m_0 c^2\right)^2 = \mathcal{E}'^2_2 \qquad (4)$$

$$\therefore \mathcal{E}'^2_1 - \mathcal{E}'^2_2 = \frac{4}{9}\left(m_0 c^2\right)^2 \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (1)، (5) نحصل على:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{13}{18} m_0 c^2$$

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{5}{18} m_0 c^2$$

وبما أن الكتلة الساكنة للجسيم الآخر تساوي صفراً، وبعد الاستعانة بقانون حفظ الزخم، المعادلة (2) نكتب:

$$\mathcal{E}'_2 = cp'_1 = cp'_2 = \frac{5}{18} m_0 c^2 \qquad (6)$$

$$\therefore \frac{\mathcal{E}'_2}{cp'_2} = 1$$

وباستخدام معادلات تحويل الطاقة و الزخم نحصل على:

$$(cp_2)_x = \gamma\left(cp'_2 \cos\alpha + \beta\,\mathcal{E}'_2\right) = 0$$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{\beta\,\mathcal{E}'_2}{cp'_2} = -\beta = -\frac{4}{5}$$

ومن العلاقة الأخيرة نستنتج أن:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

نطبق مرة أخرى معادلات تحويل الطاقة والزخم للجسيم المشحون فيكون:

$$(cp_1)_x = \gamma\left[(cp_1')_x + \beta\varepsilon_1'\right]$$

$$\therefore cp_1 \cos\theta = \gamma\left(-cp_1'\cos\alpha + \beta\varepsilon_1'\right)$$

$$-cp_1\sin\theta = -cp_1'\sin\alpha$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\alpha/\gamma}{-\cos\alpha + \beta\left(\frac{\varepsilon_1'}{cp_1'}\right)}$$

$$\frac{\varepsilon_1'}{cp_1'} = \frac{(13/18)m_0c^2}{(5/18)m_0c^2} = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{(3/5)(3/5)}{4/5 + (4/5)(13/5)} = \frac{9}{25}.\frac{25}{72}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{8}$$

$$\theta = 7.12^o$$

الآن بما أن الطاقة الكلية تساوي الطاقة الحركية مضافاً إليها طاقة السكون فإن:

$$\varepsilon_2 = T = cp_2$$

$$\because cp_2 = cp_2'\sin\alpha$$

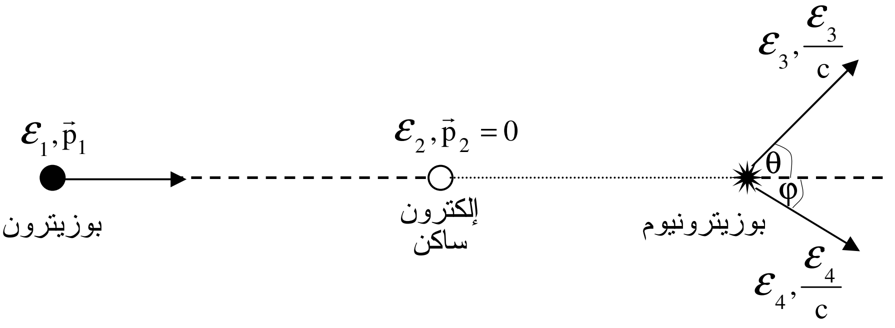
$$\therefore T = (5/18)(3/5)m_0c^2$$

$$\therefore T = \frac{1}{6}m_0c^2$$

المثال (9):

بوزيترون طاقته الحركية 0.511 MeV اصطدم مع إلكترون كان ساكناً فتولدت نتيجة هذا التصادم ذرة البوزيترونيوم طليقة الحركة، بعد ذلك انحلت هذه الذرة إلى شعاعي جاما. أولاً: ما سرعة ذرة البوزيترونيوم؟ ثانياً: ما أعظم طاقة محتملة قد يمتلكها الفوتون بعد تولده؟

الحل:



الشكل (5−17): بوزيترون متحرك بسرعة ثابتة نحو إلكترون ساكن. بعد التصادم تتولد ذرة البوزيترونيوم ثم تنحل الى شعاعي γ.

نفرض أن $c\beta$ سرعة البوزيترونيوم قبل الانحلال. ومن قانون حفظ المادة فأن كتلة السكون لهذه الذرة مباشرة بعد التصادم وقبل الانحلال تساوي $2m_0$، حيث أن m_0 الكتلة الساكنة للإلكترون أو البوزيترون. الشكل (5−17) يوضح كيفية حدوث عملية التصادم ومن ثُم عملية الانحلال إلى فوتونين طاقة أحدهما $\mathcal{E}_3$ وزخمه $\mathcal{E}_3/c$ ويعمل الزاوية θ مع الاتجاه الأصلي لحركة البوزيترون والآخر طاقته $\mathcal{E}_4$ وزخمه $\mathcal{E}_4/c$ ويعمل الزاوية φ مع ذلك الاتجاه.

إذا فرضنا الآن أن كتلة البوزيترونيوم في حالة حركة تساوي M فإن:

$$M = 2\gamma m_0$$

إذ أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \quad , \quad \beta = \frac{\upsilon}{c}$$

وإذا كانت طاقته الكلية تساوي $\mathcal{E}$ فإن:

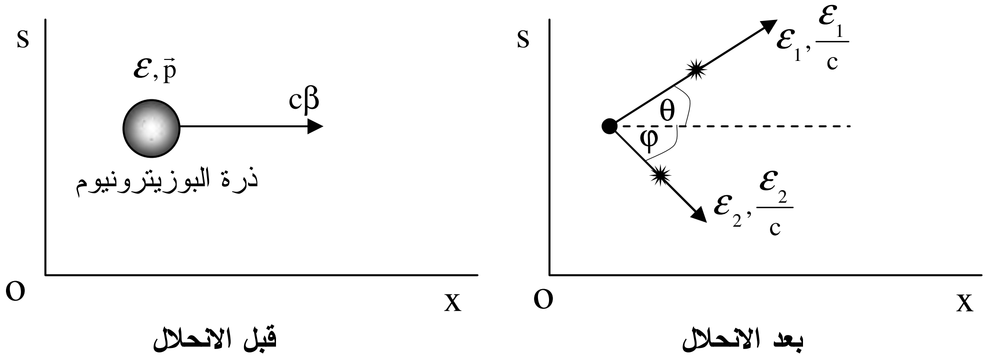
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = Mc^2 = 2\gamma m_0 c^2 \qquad (1)$$

وبتطبيق قانون حفظ الزخم قبل الانحلال نكتب:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

إذ أن $\vec{p}$ زخم ذرة البوزيترونيوم. وبما أن $\vec{p}_2 = 0$ [لاحظ الشـــكل (5−18)] يكون $\vec{p}_1 = \vec{p}$

$$\therefore p_1^2 = p^2 \qquad (2)$$



الشكل (5- 18): ذرة البوزيترونيوم تتحرك بسرعة ثابتة في s قبل الانحلال. بعد الانحلال يتولد شعاعا γ.

المعادلة (2) تبين تساوي زخمي البوزيترونيوم والبوزيترون وهذا يُمّكننا من كتابة العلاقة الآتية:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}\right)^2 - m_0^2c^2 = \left(2\gamma\beta m_0 c\right)^2 \qquad (3)$$

$$\because \mathcal{E}_1 = T_1 + m_0c^2$$

$$\therefore \left(\frac{T_1}{c} + m_0c\right)^2 - m_0^2c^2 = \gamma^2\beta^2\left(2m_0c\right)^2$$

$$\therefore T_1^2 + T_1\left(2m_0c^2\right) = \left(\gamma^2 - 1\right)\left(2m_0c^2\right)^2$$

ومن هذه العلاقة الأخيرة ينتج أن:

$$\gamma^2 = 1 + \left(\frac{T_1}{2m_0c^2}\right) + \left(\frac{T_1}{2m_0c^2}\right)^2 \qquad (4)$$

وبما أن: $2m_0c^2 = 1.022$ MeV

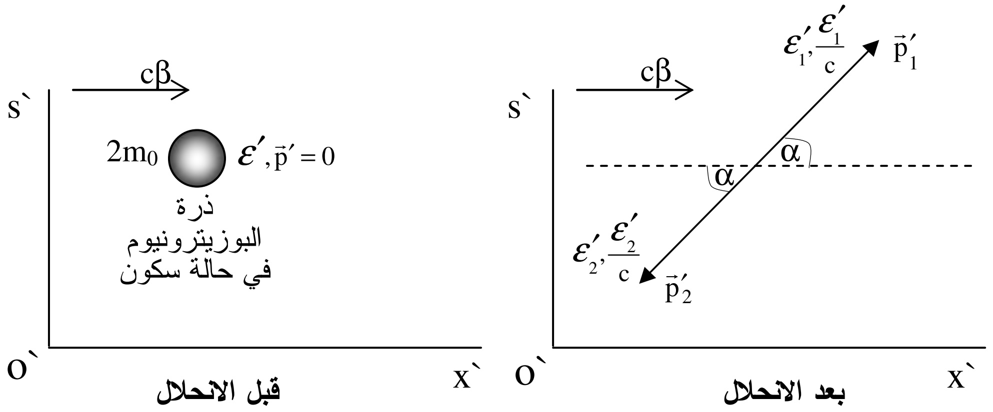
$$\therefore \left(\frac{T_1}{2m_0c^2}\right) = \frac{0.511}{1.022} = 0.5$$

$$\therefore \left(\frac{T_1}{2m_0c^2}\right)^2 = 0.25$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نجد أن:

$$\gamma^2 = 1.75$$
$$\therefore \gamma \cong 1.33$$
$$\therefore \beta \cong 0.65$$

إذن سرعة ذرة البوزيترونيوم مباشرة بعد التصادم تساوي 0.65c. نستعين الآن بمحاور مركز الكتلة كما موضح في الشكل (5-19)



الشكل (5- 19): ذرة البوزيترونيوم في حالة سكون في `s قبل الانحلال. بعد الانحلال يتولد فوتونان حيث يبقي الزخم الكلي مساوياً صفراً.

من قانون حفظ الزخم نجد في هذا المحور أن الفوتونين المتولدين يسيران باتجاهين متعاكسين في خط مستقيم واحد.

$$\therefore \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0 \qquad (5)$$

ومن قانون حفظ الطاقة نكتب:

$$\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' = 2\,m_0 c^2 \qquad (6)$$

وبما أن الزخمين متساويان بالمقدار فإن:

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_2' = m_0 c^2$$

وباستخدام معادلات تحويل الطاقة و الزخم من s إلى `s ينتج:

$$\mathcal{E}_1' = \gamma(\mathcal{E}_1 - \beta\,\mathcal{E}_1 \cos\theta)$$
$$= \gamma\,\mathcal{E}_1(1 - \beta\cos\theta)$$

$$\therefore \mathcal{E}_1 = \frac{m_0 c^2}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \qquad (7)$$

أعظم قيمة للطاقة $\mathcal{E}_1$ العائدة للبوزيترون هي عندما تكون الزاوية θ مساوية صفراً أي أن θ=0 في المعادلة (7).

$$\therefore \mathcal{E}_{1\max} = \frac{m_0c^2}{\gamma(1-\beta)} = \frac{0.511\text{MeV}}{1.33(1-0.65)}$$

$$\therefore \mathcal{E}_{1\max} = 1.1\text{MeV}$$

المثال (10):

جسيم مشحون كتلته الساكنة M_0 ينحل في حالة سكون إلى جسيمين الكتلة الساكنة لأحدهما m_{01} و للآخر m_{02} حيث أن M_0 أكبر من $(m_{01}+m_{02})$ بمقدار ΔM. مستعيناً بالمتجهات الرباعية للزخم وبقوانين حفظ الطاقة والزخم استنتج أن الطاقة الحركية T_i لأي من الجُسيمين المتحررين تعطى بالعلاقة:

$$T_i = \Delta M\left(1-\frac{m_{0i}}{M_0}-\frac{\Delta M}{2M_0}\right) \quad , i=1,2$$

الحل:

$$\Delta M = M_0-(m_{01}+m_{02}) \qquad (1)$$

إن مجموع الطاقتين الحركيتين للجسيمين المتحررين بعد الانحلال لابد أن تساوي ΔMc^2. وبما أن الزخم الكلي للنظام يساوي صفراً يكون للجسيمين زخمان متساويان بالمقدار ومتعاكسان بالاتجاه.

$$\therefore \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$$

ومن قانون حفظ الطاقة :

$$\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=\mathcal{E} \qquad (2)$$

أي أن:

$$c\sqrt{p^2+m_{01}^2c^2}+c\sqrt{p^2+m_{02}^2c^2}=M_0c^2 \qquad (3)$$

إن قانون حفظ الطاقة والزخم لنظام تحصل فيه عملية انحلال في توليد جسيمين يمكن كتابته بعد الاستعانة بالمتجهات الرباعية للزخم بالشكل التالي:

$$p_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu} \tag{4}$$

حيث أن:

$$p_{2\mu} = \left(\vec{p}_2, i\frac{\mathcal{E}_2}{c}\right) \quad , \quad p_{1\mu} = \left(\vec{p}_1, i\frac{\mathcal{E}_1}{c}\right) \quad , \quad p_\mu = \left(\vec{p}, i\frac{\mathcal{E}}{c}\right)$$

ومن خواص هذه المتجهات الرباعية أن:

$$\left.\begin{aligned} p_\mu \cdot p_\mu &= -M_0^2 c^2 \\ p_{1\mu} \cdot p_{1\mu} &= -m_{01}^2 c^2 \\ p_{2\mu} \cdot p_{2\mu} &= -m_{02}^2 c^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ومن المعادلة (4) نكتب:

$$p_{2\mu} \cdot p_{2\mu} = (p_\mu - p_{1\mu}) \cdot (p_\mu - p_{1\mu})$$

$$\therefore -m_{02}^2 c^2 = -M_0^2 c^2 - m_{01}^2 c^2 - 2 p_\mu \cdot p_{1\mu}$$

وبما أن النظام M_0 في حالة سكون، لذا يختفي الجزء الفضائي العائد لمتجهه الرباعي وعلية يحصل أن:

$$p_\mu \cdot p_{1\mu} = \left(i\frac{\mathcal{E}}{c}\right) \cdot \left(i\frac{\mathcal{E}_1}{c}\right) = -\frac{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}{c^2} = -M_0\, \mathcal{E}_1$$

$$\therefore \mathcal{E}_1 = \frac{\left(M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2\right)c^4}{2\mathcal{E}}$$

$$\therefore \mathcal{E}_1 = \frac{\left(M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2\right)c^2}{2M_0} \tag{6}$$

وبالمثل نحصل على:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\left(M_0^2 + m_{02}^2 - m_{01}^2\right)c^2}{2M_0} \tag{7}$$

من المفيد أحياناً أن نعرف الطاقتين الحركيتين T_1 و T_2 للجسيمين المتحررين من أن نعرف الطاقتين الكليتين $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$.

$$\therefore T_1 = \mathcal{E}_1 - m_{01}c^2 = \frac{\left(M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2 - 2M_0 m_{01}\right)c^2}{2M_0}$$

أي أن:

$$\left(\frac{2M_0}{c^2}\right)T_1 = M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2 - 2M_0 m_{01} \tag{8}$$

$$\because \Delta M = M_0 - (m_{01} + m_{02})$$

$$\therefore (\Delta M)^2 = M_0^2 + m_{01}^2 + m_{02}^2 - 2M_0 m_{01} - 2M_0 m_{02} + 2m_{01}m_{02}$$

وبمقارنة العلاقة الأخيرة بالعلاقة (8) ينتج أن :

$$\left(\frac{2M_0}{c^2}\right)T_1 = 2M_0(M_0 - m_{01} - m_{02}) - 2m_{01}(M_0 - m_{01} - m_{02}) - \Delta M^2$$

$$= 2M_0 \Delta M - 2m_{01}\Delta M - \Delta M^2$$

$$\therefore \frac{T_1}{c^2} = \Delta M\left(1 - \frac{m_{01}}{M_0} - \frac{\Delta M}{2M_0}\right)$$

و بصورة عامة يمكننا كتابة العلاقة الآتية:

$$T_i = \Delta M\left(1 - \frac{m_{0i}}{M_0} - \frac{\Delta M}{2M_0}\right)c^2 \qquad (9)$$

ويلاحظ من هذه العلاقة الأخيرة أن الحد $\frac{\Delta M}{2M_0}$ يمثل التصحيح النسبي في النتائج التي لا تؤخذ فيها التأثيرات النسبية.

سبق أن ناقشنا مثالاً يتعلق بانحلال جسيم البايون "π" إلى جسيم الميون "μ" والنيوترينو "ν". ندون الآن النتائج الآتية لنبين كيفية استخدام العلاقة (9):

$$\Delta Mc^2 = 33.9\,\text{MeV}$$

$$M_0 c^2 = 139.6\,\text{MeV}$$

$$m_\mu c^2 = 105.7\,\text{MeV}$$

$$m_\nu c^2 = 0$$

$$\therefore T_\mu = 33.9\left(1 - \frac{105.7}{139.6} - \frac{33.9}{2\times 139.6}\right) = 4.1\,\text{MeV}$$

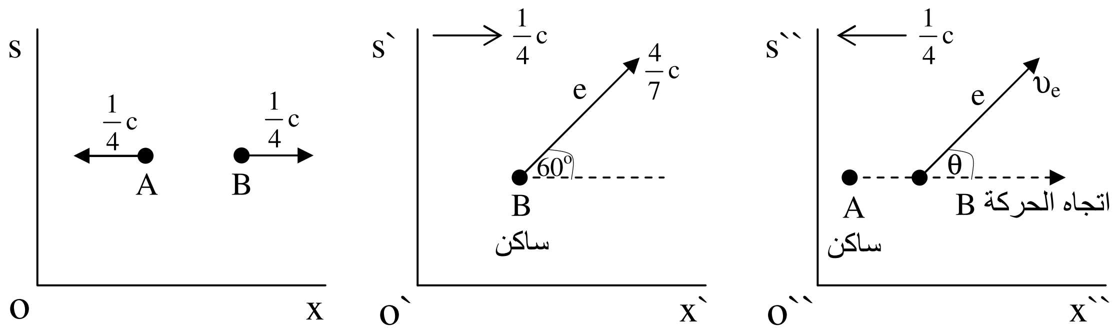
$$T_\nu = \Delta Mc^2 - T_\mu = 33.9 - 4.1 = 29.8\,\text{MeV}$$

المثال (11):

تجزأ جُسيم إلى جُسيمين آخرين متماثلين A و B يتحركان باتجاهين متعاكسين وبسرعتين متساويتين مقدار كل منهما $\frac{1}{4}c$، ثم انبعث من الجسيم B إلكترون بسرعة $\frac{4}{7}c$ مُقاسة نسبةً للجسيم نفسه وبزاوية 60° مع خط

حركته. استنتج نسبةً لمحور إسناد يُشاهد فيه الجسيم A في حالة سكون، أن اتجاه حركة الإلكترون يصنع زاوية مقدارها 30° مع اتجاه حركة الجسيم B.

الحل:



الشكل (5- 20): تجزؤ جسيم إلى جسيمين آخرين A و B في s. انبعث إلكترون من B في s`. وفي s`` يُشاهد A في حالة سكون.

الشكل (5−20) يبين أن الجسيمين A و B يتحركان باتجاهين متعاكسين في محور الإسناد s. نفرض أن u سرعة الإلكترون المُنبعث من الجسيم B في هذا المحور وأن مركبتيه هما u_x و u_y.

وباستخدام معادلات تحويل السرعة من s` إلى s نجد أن:

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x} = \frac{\frac{4c}{7}\cos 60 + \frac{c}{4}}{1 + \left(\frac{c/4}{c^2}\right)\left(\frac{4c}{7}\cos 60\right)} = \frac{c}{2}$$

$$u_y = \frac{u'_y / \gamma}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x}$$

حيث أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \quad , \quad \beta = \frac{\upsilon}{c} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/16}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\therefore u_y = \frac{\left(\frac{4c}{7}\sin 60\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{1+\left(\frac{c/4}{c^2}\right)\left(\frac{4c}{7}\cos 60\right)}$$

$$\therefore u_y = \frac{c}{\sqrt{5}}$$

يشاهد الإلكترون يصنع زاوية 60° مع الاحداثي x في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة c/4 بالنسبة لمحور الإسناد s. أما في محور الإسناد ``s الذي يتحرك بسرعة c/4– بالنسبة لمحور الإسناد s فيشاهد الإلكتـــرون يتحـــرك باتجاه يصنع الزاوية θ مع اتجاه حركة الجسيم B. وعلينا الآن أن نثبـــت أن $\theta=30^o$.

نستخدم مرة أخرى معادلات تحويل السرعة من s إلى ``s وكما هو موضح في الشكل فيكون:

$$\upsilon_e \sin\theta = \frac{\left(\frac{c}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{1-\left(\frac{-c/4}{c^2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{3}c}{9}$$

$$\upsilon_e \cos\theta = \frac{\frac{c}{2}-(-c/4)}{1-\left(\frac{-c/4}{c^2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)} = \frac{2c}{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{3}c}{9}\cdot\frac{3}{2c} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^o$$

تمارين الفصل الخامس

1 – جسيم كتلته الساكنة M_0 في حالة سكون ينحل إلى جسيمين الكتلة الساكنة لأحدهما $\frac{1}{5}M_0$ وللآخر $\frac{2}{5}M_0$. احسب الطاقة الحركية لكل منهما.

ج : $T_1=0.16M_0c^2$
$T_2=0.24M_0c^2$

2 – ميزون نوع π^0 كتلته الساكنة m_0 وسرعته βc ينحل إلى فوتونين شوهد أحدهما يتحرك باتجاه يصنع زاوية $\theta=0^o$ مع الاتجاه الأصلي للميزون. احسب طاقة هذا الفوتون. وما طاقة الفوتون نفسه في محور إسناد حيث يُشاهد الميزون في حالة سكون قبل الانحلال؟

3 – جسيم كتلته الساكنة m_0 يتحرك في خط مستقيم باتجاه الاحداثي x الموجب في محور الإسناد s ينحل إلى فوتونين يسيران باتجاهين يصنعان زاوية مقدارها 60° على جانبي الخط المستقيم. استنتج أن سرعة الجسيم قبل الانحلال تساوي $\frac{1}{2}c$. ثم احسب طاقة كل من الفوتونين.

ج : $\varepsilon=\frac{m_0c^2}{\sqrt{3}}$

4 – بوزيترون طاقته الحركية تساوي طاقة سكونه، اصطدم بالكترون ساكن تصادماً غير مرن فتولدت نتيجة للتصادم ذرة البوزيترونيوم طليقة الحركة، ثم انحلت إلي فوتونين. **أولاً:** ما سرعة ذرة البوزيترونيوم؟ **ثانياً:** ما أعظم طاقة محتملة قد يمتلكها الفوتون بعد تولده؟

ج : $\frac{c}{\sqrt{3}}$, 1.20 MeV

5 – جسيم كتلته الساكنة m_0 في محور الإسناد `s ينحل إلى جسيمين وهو في حالة سكون، الكتلة الساكنة لأحدهما $0.3m_0$ وللآخر $0.5m_0$. جد **أولاً:** زخم كل من

الجسيمين المتحررين. **ثانياً:** محصلة الزخم p_x في محور الإسناد s علماً بأن السرعة النسبية بين محوري الإسناد s و `s تساوي 0.6c.

ج : $p_x = \frac{3}{4} m_0 c$

6 – جسيم يتحرك في محور الإسناد s باتجاه الاحداثي x الموجب ينحل إلى ميزونين نوع π أحدهما بقي في حالة سكون والآخر في حالة حركة بعد الانحلال. احسب طاقة الجسيم قبل الانحلال وطاقة الميزون المتحرك بعد الانحلال علماً بأن كتلة الجسيم الساكنة $0.5 GeV/c^2$ وكتلة الميزون الساكنة $0.14 GeV/c^2$.

7 – ميزون π^0 كتلته الساكنة m_0 وسرعته u ينحل أثناء طيرانه إلى فوتونين. فإذا كان أحد الفوتونين المتحررين يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الأصلي للميزون. اثبت أن طاقته $h\nu$ تعطى بموجب العلاقة التالية:

$$h\nu = \frac{m_0 c^2 \left(1 - u^2/c^2\right)^{1/2}}{2\left(1 - u \cos\theta/c\right)}$$

8 – جسيم طاقته الكلية $\frac{3}{2} m_0 c^2$ يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب في محور الإسناد s بسرعة تساوي $\frac{3}{2} c$ انحل إلى جسيمين أحدهما فوتون شوهد يتحرك عمودياً على الاحداثي x والآخر كتلته الساكنة m_0 يتحرك باتجاه يصنع زاوية θ مع الاحداثي x. احسب <u>أولاً:</u> طاقة وزخم الفوتون في محور الإسناد `s حيث يشاهد الجسيم ساكناً قبل الانحلال، <u>ثانياً:</u> طاقة وزخم الفوتون في محور الإسناد s.

ج : $\varepsilon_1' = \frac{11}{60} m_0 c^2 \quad , \quad p_1' = \frac{11}{60} m_0 c$

$\varepsilon_1 = \frac{11}{75} m_0 c^2 \quad , \quad p_1 = \frac{11}{75} m_0 c$

9 – بروتون p يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب وبطاقة حركية تساوي 5/3GeV يضرب بروتون الضد $\bar{p}$ الذي كان في حالة سكون في محور الإسناد `s. خلال عملية التفاعل يتولد فوتونان يتحركان باتجاهين متعاكسين على خط

منطبق على الاحداثي x. فإذا علمت أن طاقة السكون لكل من البروتون و بروتون الضد تساوي 1GeV. **أولاً**: ما طاقة كل من الفوتونين المتولدين؟ **ثانياً**: ما طاقة كل من الفوتونين المتولدين في محور الإسناد s حيث يشاهد البروتون في حالة سكون قبل التفاعل؟

ج : s` 2GeV, 2/3 GeV

10 – جسيم x في حالة سكون ينحل إلى جسيمين a وb وتؤكد قوانين حفظ الزخم أن هذين الجسيمين يتحركان باتجاهين متعاكسين وأن مقدار الزخم لأحدهما يساوي مقدار الزخم العائد للآخر. أستنتج أن:

$$p_a = p_b = \frac{c}{2m_x}\left[m_b^2 - (m_a + m_x)^2\right]^{1/2}\left[m_b^2 - (m_a - m_x)^2\right]^{1/2}$$

اذ أن m_b, m_a, m_x تمثل الكتل الساكنة للجسيمات b, a, x على التوالي.

11 – بايون يتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب، ضرب بروتوناً ساكناً. أحسب زخم العتبة للبايون اللازم لحدوث عملية التفاعل الاتية:

$$\pi + p \rightarrow K + \Sigma$$

علماً بأن:

$$\begin{cases} m_\pi c^2 = 150\,\text{MeV} \\ m_k c^2 = 500\,\text{MeV} \\ m_p c^2 = 900\,\text{MeV} \\ m_\Sigma c^2 = 1200\,\text{MeV} \end{cases}$$

ج : 1133 MeV/c

الفصل السادس
(النسبية والكهربائية المتحركة)

1.6 المقدمة
2.6 اللاتغير في كمية الشحنة المتحركة.
3.6 قياس المجال الكهربائي في محاور إسناد مختلفة.
4.6 مجال شحنة نقطية تتحرك بسرعة ثابتة.
5.6 القوة المؤثرة على شحنة متحركة.
6.6 تحويلات المجالات الكهرومغناطيسية الناتجة من الشحنات الكهربائية المتحركة بسرعة ثابتة.
7.6 النسبية والتفاعلات الكهرومغناطيسية.
أمثلة محلولة.
تمارين الفصل السادس

النسبية والكهربائية المتحركة

6 – 1 المقدمة

لقد توصل العديد من العلماء إلى وصف دقيق ومتكامل للتأثير المغناطيسي للتيارات الكهربائية وكان من أبرز هؤلاء العلماء أمبير وفاراداي الذي توّج اكتشافه للحث الكهرومغناطيسي وذلك بعد مُضي أثنى عشر عاماً على تجربة أورستد. وكنتيجة للعديد من الاكتشافات التجريبية، ظهرت النظرية الكهرومغناطيسية التقليدية (الكلاسيكية). ورغم أن العالم ماكسويل قد توصل إلى صياغة تلك النظرية رياضياً إلا أن الإثبات العملي لهذه النظرية قد تم من قبل العالم هيرتز الذي أثبت وجود الموجات الكهرومغناطيسية عام 1888.

وتعتبر النظرية الكهرومغناطيسية الأساس الذي نبعت منه النظرية النسبية الخاصة، حيث اقترب العالم لورنس كثيراً من الصياغة النهائية عندما كان يبحث في الديناميكا الكهربائية للشحنات المتحركة، والتي توصل إليها العالم آينشتاين فيما بعد. وأصبحت فرضيات النظرية النسبية الخاصة وما تحتويه هذه الفرضيات تشكل اليوم هيكلاً واسعاً لا يضم فقط القوانين الكهرومغناطيسية وإنما يتعداه إلى كل القوانين الفيزيائية أيضاً، أي أنها تكون صالحة للتطبيق في جميع محاور الإسناد. لقد ثبت في حالة وجود وسط مادي أن الكميات الفيزيائية المرتبطة

بالمجالين الكهربائي والمغناطيسي تكون معتمدة على خصائص ذلك الوسط ويوجد نطاق واسع من الأوساط المادية التي يمكن اعتبار خصائصها المتمثلة بالكميات $\sigma,\in,\mu$ ثابتة عندما تكون هذه الأوساط في حالة سكون. فإذا كان الوسط المادي في حالة سكون في محور الإسناد `s يكون متحركاً بسرعة ثابتة υ في محور الإسناد s. وإذا كانت معادلات ماكسويل تخضع لقواعد النظرية النسبية الخاصة فإنها تكون صالحة في محور الإسناد s الذي فيه يكون الوسط المادي متحركاً.

ولابد هنا من الإشارة إلى أن خصائص المادة معروفة في محور الإسناد `s حيث يكون الوسط المادي في حالة سكون، وعليه من الممكن تطبيق تحويلات النظرية النسبية الخاصة لكي نحصل على معادلات تكون صالحة في محور الإسناد s حيث يشاهد الوسط المادي في حالة حركة بسرعة ثابتة. إن هذه الطريقة تستخدم الآن لتشمل مختلف الكميات الكهرومغناطيسية.

6 – 2 اللاتغير في كمية الشحنة المتحركة.

من الممكن تحديد كمية الشحنة لجسيم مشحون متحرك أو مجموعة من الشحنات المتحركة من قانون كاوس الذي يمكن تعريفه كالآتي:

إن الشحنة الكهربائية Q الموجودة ضمن حيز معين، تتناسب مع التكامل السطحي لشدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ مأخوذ على جميع نقاط سطح مغلق A يحيط بذلك الحيز. إن هذا السطح يثبت في محور الإسناد s و من ثم يقاس المجال الكهربائي $\vec{E}$ من قبل مشاهد في هذا المحور عند أية نقطة (x,y,z) ضمن السطح في اللحظة الزمنية t، و يعرف المجال بالقوة المؤثرة على شحنة اختبار ساكنة في محور الإسناد نفسه.

من الممكن الآن حساب التكامل السطحي في زمن t بواسطة مشاهدين يتم انتشارهم على جميع نقاط ذلك السطح في اللحظة نفسها. وبما أن السطح A في حالة سكون في محور الإسناد s فمن الممكن كتابة التكامل السطحي بالصيغة $\int_{A(t)} \vec{E}.d\vec{a}$. وحسب قانون كاوس فإن الشحنة الكلية Q تُعطي بالعلاقة:

$$\frac{Q}{\in_0} = \int_{A(t)} \vec{E}.d\vec{a} \qquad (1\text{-}6)$$

وهناك أدلة قاطعة بأن الشحنة الكلية في النظام لا تتغير بسبب حركة ناقلات الشحنة ويمكن الاستدلال عليه بواسطة التعادل الكهربائي التام للذرات والجزيئات. ويمكن التوصل إلى هذه الحقيقة بأدلة أخرى وذلك من الأطياف الضوئية لنظائر عنصر ما حيث وجد اختلاف ملحوظ في حركة البروتونات داخل النواة ولكن عند مقارنة خطوط الطيف لم يلاحظ أي تغير يمكن إسناده لوجود فرق في الشحنة النووية الكلية.

لقد أثبتت التجارب على أن التكامل السطحي لقانون كاوس لا يعتمد إلا على عدد الجسيمات المشحونة داخل السطح A وعلى نوعية هذه الجسيمات ولكنه لا يعتمد على حركتها. وإذا كان هذا التعبير صحيحاً في محاور إسناد واحدة فإنه يصح في كافة محاور الإسناد الأخرى طبقاً لفرضيات النظرية النسبية الخاصة. إذا اعتبرنا الآن أن محور الإسناد الآخر هو `s يتحرك بسرعة $\upsilon$ بالنسبة لمحور الإسناد s وكان هناك سطح مغلق `A في `s عند الزمن `t يحيط بالأجسام المشحونة نفسها التي أحاط بها السطح A عند زمن t في محور الإسناد s فإن:

$$\int_{A(t)} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_{A'(t')} \vec{E}'\cdot d\vec{a}' \qquad (2\text{-}6)$$

6 – 3 قياس المجال الكهربائي في محاور إسناد مختلفة.

بعد الملاحظات التجريبية التي أثبتت عدم تغير شحنة الجسيم المتحرك لابد من إيجاد علاقة تتعلق بالمجال الكهربائي لكي تبقى الشحنة ثابتة تحت تأثير تحويلات لورنس في جميع محاور الإسناد. فإذا قاس مشاهد في محور الإسناد s مجالاً كهربائياً $\vec{E}$ عند زمن معين، فما هو المجال الكهربائي الذي يقيسه المشاهد في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة ثابتة تساوي υ بالنسبة لمحور الإسناد s في اللحظة الزمنية نفسها ؟

وللإجابة على هذا السؤال نأخذ لوحين ساكنين في محور الإسناد s يوازيان المستوى (x,z) كما هو موضح في الشكل (6 – 1) ونفرض أن شحنة كهربائية

مقدارها Q قد تم توزيعها بصورة متجانسة على اللوحين بحيث أن كثافة الشحنة السطحية على أحدهما σ+ وعلى اللوح الآخر σ−.

مشاهد في محور الإسناد s يمكن أن يقيس شدة المجال الكهربائي باتجاه الاحداثي y فيجده مساوياً إلى:

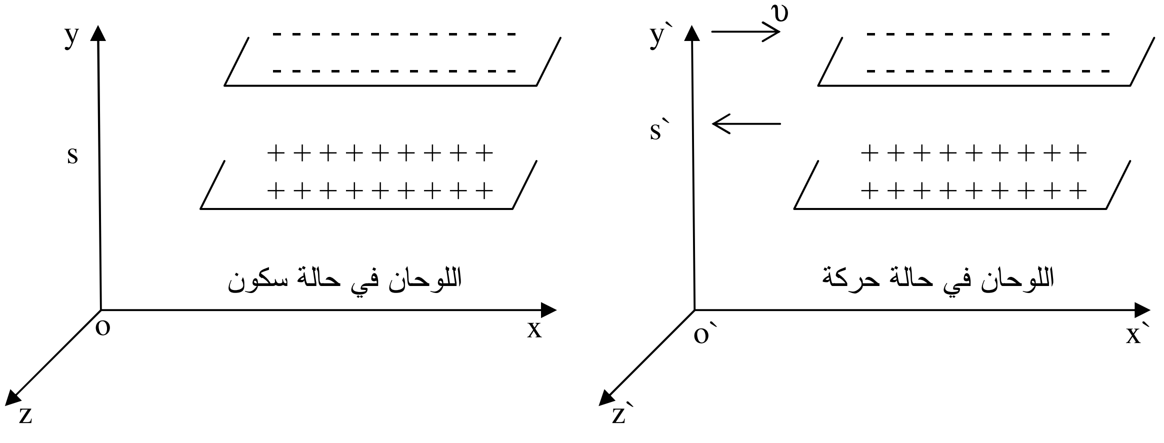
$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (3\text{-}6)$$

في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة υ باتجاه الاحداثي x الموجب نسبة لمحور الإسناد s نلاحظ أن بُعدي اللوحين يتقلصان في هذا الاتجاه بمقدار $(1-\beta^2)^{1/2}$ حيث أن $\beta = \upsilon/c$. وبما أن الشحنة الكلية Q تبقى دون تغيير تحت هذا النوع من التحويلات فان كثافة الشحنة السطحية `σ ستزيد على σ بمقدار $(1-\beta^2)^{-1/2}$، أي أن:

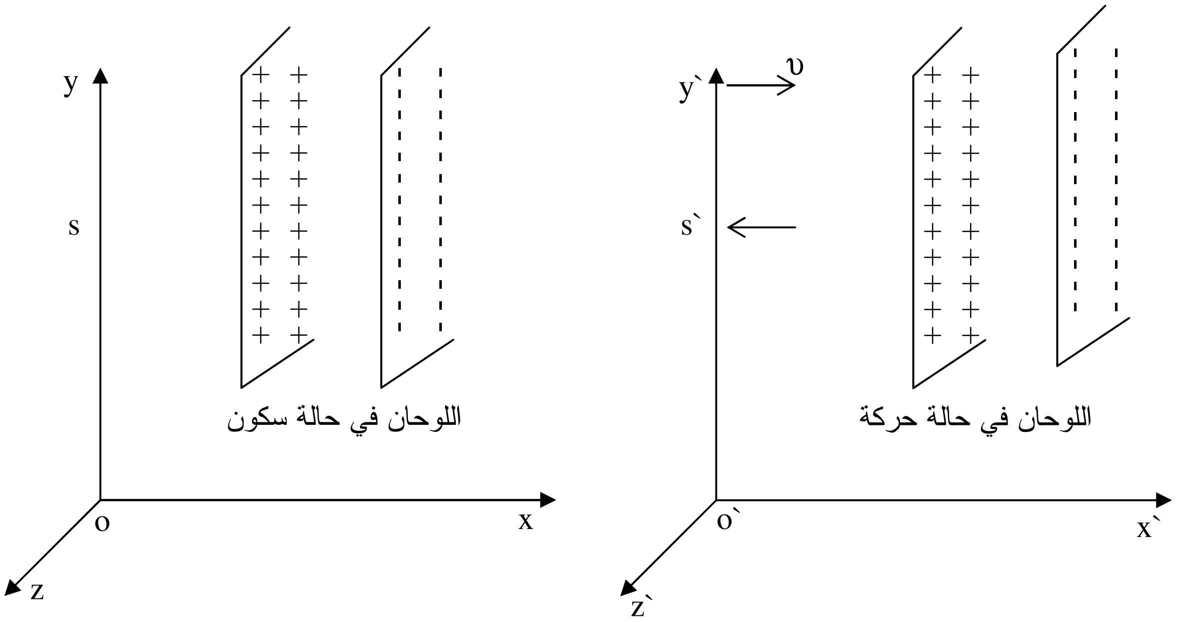
$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad (4\text{-}6)$$

لذا يمكن كتابة المجال الكهربائي E'_y في محور الإسناد `s كالآتي:

$$E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \gamma E_y \qquad (5\text{-}6)$$



الشكل (6 – 1): لوحان متوازيان مشحونان، في حالة سكون موازيان للإحداثي x في s وبنقل الحدث إلى `s فانهما يتحركان بالاتجاه السالب للأحداثي x.



الشكل (6 – 2): اللوحان عموديان على الإحداثي x وهما في حالة سكون في s. عندما ينقل الحدث إلى `s فانهما يتحركان بالاتجاه السالب للإحداثي x.

ولو ناقشنا حالة مختلفة عندما يتعامد اللوحان الساكنان المشحونان على الأحداثي x في محور الإسناد s كما موضح في الشكل (6 – 2)، فمن الممكن والحالة هــذه أن يسجل المشاهد في هذا المحور مجالاً كهربائياً باتجاه x مقداره:

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (6\text{-}6)$$

وعندئذ تصبح كثافة الشحنة السطحية الموزعة على اللوحين في محور الإسناد `s مساوية تلك في محور الإسناد s لأن بُعدي اللوحين لا يحدث لهما تغييــر وإنمــا المسافة بينهما هي التي تُعاني تغييراً وهذا التغيير لا يدخل في حســابات المجــال الكهربائي باتجاه الاحداثي x، لذا فإن:

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_x \qquad (7\text{-}6)$$

$$\therefore E'_x = E_x \qquad (8\text{-}6)$$

من المعادلتين (6 – 5) و (6 – 8) من الممكن صياغة حالة عامة مناسبة للحركة النسبية في أي اتجاه للشحنات الكهربائية الساكنة في محور الإسناد s التي تعتبر مصدراً للمجال الكهربائي $\vec{E}$. ولنأخذ محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة منتظمة υ بالنسبة لمحور الإسناد s ثم نحلل المجال الكهربائي عند أية نقطة في s إلى مركبتين: الأولى موازية لاتجاه υ وهي E_{II} والأخرى عمودية على اتجاه υ وهي $E_{\perp}$.

وفي نفس اللحظة الزمنية والمكانية نحلل المجال الكهربائي $\vec{E}'$ في محور الإسناد `s إلى مركبتين أيضاً: الأولى موازية لاتجاه υ وهي E'_{II} والأخرى عمودية عليه وهي $\vec{E}'_{\perp}$ وبالاستعانة بالمعادلتين (6 – 5) و (6 – 8) نكتب:

$$E'_{II} = E_{II} \qquad (9\text{-}6)$$

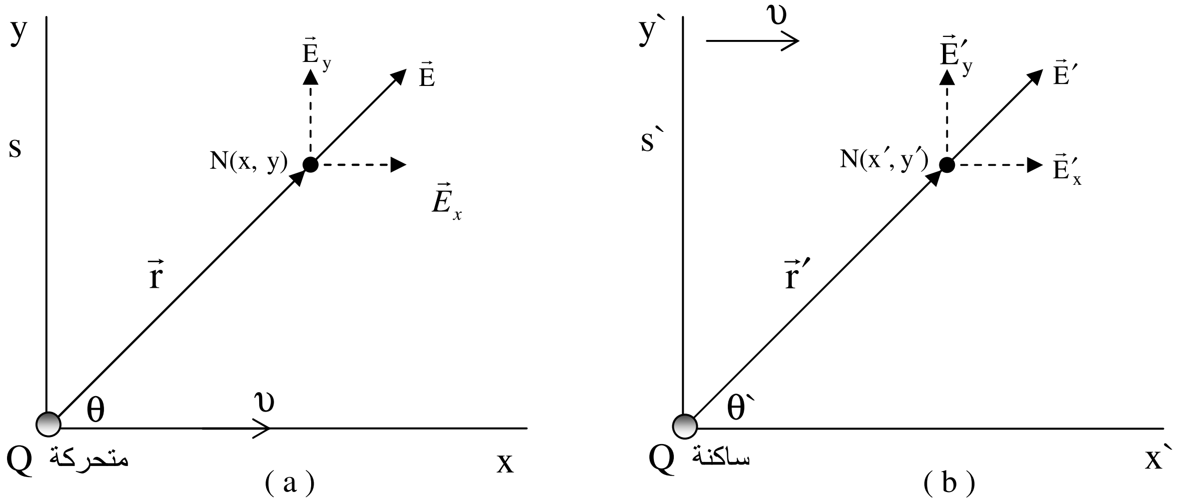
$$E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} \qquad (10\text{-}6)$$

ومن الجدير بالذكر أن المعادلات السابقة تصح للمجالات الكهربائية الناتجة عن الشحنات الكهربائية الساكنة في محور الإسناد s. أما إذا كانت الشحنات الكهربائية متحركة في محور الإسناد s فإن المجال في محور الإسناد `s لابد أن يتضمن معرفة مجالين في محور الإسناد s وهما المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي، هذا الاستنتاج سنتناوله في البنود اللاحقة من هذا الفصل.

6 – 4 مجال شحنة نقطية متحركة بسرعة ثابتة.

لنفرض وجود شحنة نقطية Q تتحرك بسرعة ثابتة υ باتجاه الاحداثي x الموجب وأن هذه الشحنة في زمن $t = 0$ كانت عند نقطة الأصل في محور الإسناد s كما موضح في الشكل (6 – a3). بما أن الشحنة في حالة حركة لا يمكننا تطبيق قانون كولوم لحساب شدة المجال الكهربائي في أية نقطة في المستوى xy كالنقطة N(x,y) على بعد $\vec{r}$ من موقع الشحنة في تلك اللحظة. ولكي نستطيع تطبيق قانون كولوم علينا أن ننقل الحدث إلى محور إسناد آخر وهو محور الإسناد `s الذي

يتحرك بسرعة ثابتة υ نسبة لمحور الإسناد s. إن المشاهد في هذا المحور يلاحظ أن الشحنة Q (التي تبقى دون تغيير كما ذكرنا سابقاً)، في حالة سكون، لاحظ الشكل (6 – 3 b).



الشكل (6 – 3): (a)شحنة نقطية Q متحركة باتجاه x في محور الإسناد s تولد مجالاً كهربائياً E عند النقطة N(x,y). (b) ينقل الحدث إلى `s فتكون الشحنة النقطية Q ساكنة ولكنها تولد مجالاً كهربائياً `E عند النقطة N(x`,y`).

من الممكن الآن تطبيق قانون كولوم لنحسب مركبتي المجال E'_x و E'_y عند النقطة $N(x',y')$ على بعد $\vec{r}'$ من موقع الشحنة الساكنة.

$$\therefore E'_x = \frac{kQ}{r'^2}\cos\theta' = \frac{kQ}{\left(x'^2 + y'^2\right)}\cdot\frac{x'}{r'}$$

$$\therefore E'_x = \frac{kQx'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \qquad (11\text{-}6)$$

إذ أن: $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi \in_0}$$

حيث أن الثابت $\in_0$ هو سماحية الفراغ.

وبالمثل يمكننا أن نكتب:

$$E'_y = \frac{kQy'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \qquad (12\text{-}6)$$

إذا أردنا الآن أن نحسب شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ ومركبتيه E_y, E_x ينبغي أن نستخدم تحويلات لورنس في زمن t = 0 حيث يكون موقع الشحنة Q في نقطة الأصل في محور الإسناد s. وفي هذه الحالة تُكتب تحويلات لورنس من s إلى `s بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}6)$$

وطبقاً للمعادلتين (6 – 5)، (6 – 8) فان:

$$E_x = E'_x = \frac{kQ(\gamma x)}{\left[(\gamma x)^2 + y^2\right]^{3/2}} \qquad (14\text{-}6)$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{kQ(\gamma y)}{\left[(\gamma x)^2 + y^2\right]^{3/2}} \qquad (15\text{-}6)$$

ولإيجاد محصلة شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ في محور الإسناد s نكتب:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2$$

$$\therefore E^2 = \frac{k^2Q^2\gamma^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(\gamma^2x^2+y^2\right)^3} = \frac{k^2Q^2\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2\left(1-\dfrac{\beta^2y^2}{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\therefore E = \frac{kQ}{r^2}\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} \qquad (16\text{-}6)$$

إذ أن: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Sin}\theta = \frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}} = \frac{y}{r}$$

وينبغي أن نلاحظ في حالة السُرع الواطئة (أي عندما تكون $\beta << 1$) فان المعادلة (16 – 6) تختزل إلى الصيغة الآتية:

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

وهي النتيجة التي نحصل عليها عملياً عندما يطلب منا حساب المجال الكهربائي لشحنة نقطية ساكنة في محور الإسناد s في نقطة على بعد r من موقع تلك الشحنة.

ولابد من الإشارة هنا إلى أن العلاقة (6 – 5) أو (6 – 10) تصبح غير صالحة للتطبيق إذا كانت الشحنة متحركة في محور الإسناد s وساكنة في محور الإسناد `s ولذلك فإننا استخدمنا في هذا البند العلاقة $E_y = \gamma E'_y$ بدلاً من العلاقة $E'_y = \gamma E_y$ كما هو ملاحظ في الشكل (6 – 3) الذي يوضح أن الشحنة Q تتحرك باتجاه الاحداثي x الموجب في محور الإسناد s وتبقى ساكنة في محور الإسناد `s.

6 – 5 القوة المؤثرة على شحنة متحركة.

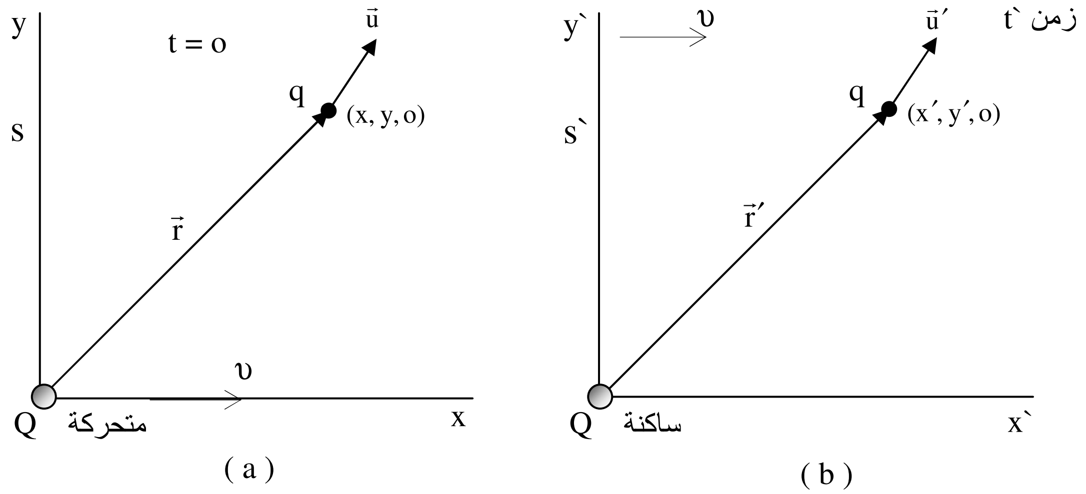
بعد أن توصلنا إلى كيفية حساب شدة المجال الكهربائي في أية نقطة قريبة من شحنة نقطية في حالة حركة بسرعة ثابتة من الممكن الآن استنتاج القوة التي تتعرض لها شحنة نقطية ساكنة في مجال شحنة نقطية أخرى متحركة.

ومن الممكن أن نأخذ الحالة التي تكون فيها الشحنة متحركة في مجال شحنات ساكنة. وقد تكون هذه الشحنة إلكترونا يتحرك بين لوحين مشحونين أو جسيماً مشحوناً يتحرك ضمن مجال كولوم الذي يحيط بنواة ذرة ما. وهنا نلاحظ أن مصادر المجال كلها ساكنة في محاور إسناد معينة مثل المحاور المختبرية. إن القوة المؤثرة على هذه الشحنة تساوي معدل التغير الذي يحصل في الزخم.

ولحساب هذه القوة نعتبر محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة مساوية لسرعة الجسيم. إذن أي مشاهد في هذا المحور يرى أن الجسيم المشحون في حالة سكون. أما الشحنات الأخرى فتشاهد تتحرك بالاتجاه المعاكس بسرعة مساوية بالمقدار لسرعة الجسيم التي تساوي $\upsilon$. لذا فان القوة المؤثرة على الشحنة الساكنة q تكون مساوية إلى `qE، حيث أن `E شدة المجال الكهربائي عند موقع الشحنة في محور الإسناد `s. ولتوضيح ذلك نفرض ما يلي:

- أن شحنة نقطية Q تسمى شحنة المصدر تتحرك بالاتجاه الموجب للأحداثي x في محور الإسناد s.
- وأن جسيماً يحمل شحنة مقدارها q تسمى شحنة الاختبار تتحرك في مجال الشحنة Q بسرعة u في زمن $t = 0$ في هذا المحور كما موضح في الشكل (6 – 4 a).

إذا كانت شحنة الاختبار في حالة حركة فان قـوتين تـؤثران عليهـا، إحـداهما كهربائية والأخرى مغناطيسية.



الشكل (6–4): (a)شحنة المصدر Q في حالة حركة باتجاه الاحداثي x. وشحنة الاختبار q تتحرك ضمن مجال Q بسرعة u في زمن $t = 0$. (b) عندما ينقل الحدث الى محور إسناد آخر تصبح شحنة المصدر ساكنة وفي هذه الحالة يمكن تطبيق قانون كولوم.

ولكي ندرس هذه الحالة بصورة أوضح وأبسط ننقل الحدث إلى محور الإسـناد `s الذي يتحرك بسرعة ثابتة υ باتجاه الأحداثي x كما موضح في الشـكل (6– 4 b). وفي هذا المحور يُشاهد أن شحنة المصدر في حالة سكون وشحنة الاختبار تغيرت سرعتها إلى $\vec{u}'$ بالاتجاه الموضح في الشكل. وبما أن الشحنة Q ساكنة فإن القـوة المؤثرة على شحنة الاختبار q هي قوة كهربائية فقط. إذن قانون كولـوم يمكـن تطبيقه في هذه الحالات لحساب القوة التي تؤثر على تلك الشحنة في ذلك الموقع. من معادلات تحويل القوة التي سبق أن توصلنا إليها في الفصل الثاني نكتب:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= f_x - \frac{\upsilon/c^2}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}\left(u_y f_y + u_z f_z\right) \\ f'_y &= \frac{f_y/\gamma}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \\ f'_z &= \frac{f_z/\gamma}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}6)$$

لندرس الآن هاتين الحالتين:

أولاً– شحنة الاختبار تشاهد في محور الإسناد s في حالة سكون أي أن $\vec{u}=0$.

ثانياً– شحنة الاختبار تشاهد في حالة حركة بسرعة $\vec{u}=\vec{u}_y$ في زمن $t = 0$ في محور الإسناد نفسه وفي الموقع (x,y,0).

بالنسبة للحالة الأولى تختزل المعادلات (6 – 17) إلى الصيغة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= f_x \\ f'_y &= \frac{f_y}{\gamma} \\ f'_z &= \frac{f_z}{\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}6)$$

من قانون نيوتن الثاني إن معدل التغير الذي يحصل للزخم بالنسبة للزمن يساوي القوة المؤثرة على الجسيم. نكتب إذن المعادلات (6 – 18) بالشكل:

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp_x}{dt} \qquad (19\text{-}6)$$

$$\frac{dp'_y}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_y}{dt} \qquad (20\text{-}6)$$

$$\frac{dp'_z}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_z}{dt} \qquad (21\text{-}6)$$

وبما أن الزخمين $\vec{p}_z$ ، $\vec{p}_y$ عموديان على اتجاه الحركة لشحنة المصدر فيمكن جمعهما بزخم واحد هو $\vec{p}_\perp$. أما الزخم $\vec{p}_x$ فهو باتجاه حركة الشحنة ويكتب بالصيغة $\vec{p}_{II}$. وهكذا تختزل المعادلات الثلاثة الأخيرة إلى معادلتين وتكتب كالآتي:

$$\frac{d\vec{p}'_{II}}{dt'} = \frac{dp_{II}}{dt} \qquad (22\text{-}6)$$

$$\frac{d\vec{p}'_{\perp}}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \qquad (23\text{-}6)$$

وطبقاً للعلاقتين (6 – 9)، (6 – 10) نحصل على:

$$\frac{d\vec{p}'_{II}}{dt'} = q\vec{E}'_{II} = q\vec{E}_{II}$$

$$\therefore \frac{d\vec{p}_{II}}{dt} = \frac{d\vec{p}'_{II}}{dt'} = q\vec{E}_{II} \qquad (24\text{-}6)$$

وكذلك:

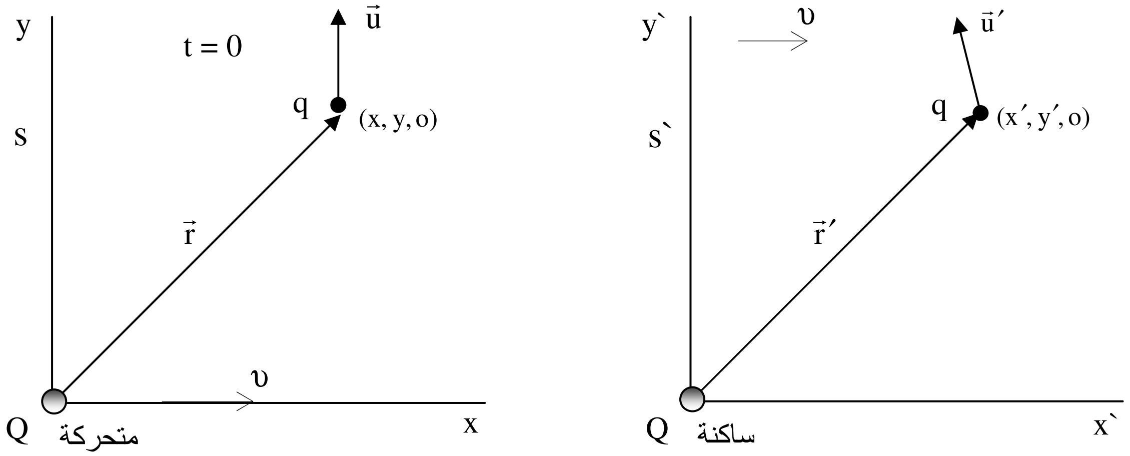
$$\frac{d\vec{p}'_{\perp}}{dt'} = q\vec{E}'_{\perp} = q\left(\frac{1}{\gamma}E_{\perp}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(qE_{\perp}\right)$$

$$\therefore \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = \gamma\frac{d\vec{p}'_{\perp}}{dt'} = \gamma\left(\frac{q}{\gamma}E_{\perp}\right)$$

$$\therefore \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = q\vec{E}_{\perp} \qquad (25\text{-}6)$$

نستنتج مما تقدم من العلاقتين (6 – 24)، (6 – 25) أن القوة الكهربائية المؤثرة على جسيم مشحون في حالة سكون في محور الإسناد s تنتشر فيه خطوط قوى كهربائية ومغناطيسية ناتجة من الشحنة المتحركة بالقرب من ذلك الجسيم تساوي حاصل ضرب مقدار الشحنة التي يحملها ذلك الجسيم في شدة المجال الكهربائي عند موقع الجسيم. ولتوضيح الحالة الثانية نعتبر الشكل (6 – 5) ونستخدم معادلات تحويل القوة من محور الإسناد \`s إلى s و كذلك معادلات تحويل السرعة من s إلى \`s فيكون:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} = -\upsilon \quad , \quad u'_y = \frac{\frac{u_y}{\gamma}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} = \frac{u_y}{\gamma} \quad , \quad u'_z = \frac{\frac{u_z}{\gamma}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x} = 0$$



الشكل (5–6): شحنة المصدر في حالة حركة في s. وشحنة الاختبار في حالة حركة بسرعة u باتجاه الاحداثي y. وبنقل الحدث الى `s تصبح شحنة المصدر في حالة سكون وبهذا يمكن تطبيق قانون كولوم.

أما بالنسبة للقوة فنحسب أولاً مركبات القوة المؤثرة على الجسيم في محور الإسناد `s فنجد:

$$f'_x = \frac{kqQ\,x'}{r'^3} \quad , \quad f'_y = \frac{kqQ\,y'}{r'^3} \quad , \quad f'_z = 0$$

تكتب الآن معادلات تحويل القوة بالصورة:

$$f_x = f'_x + \frac{\upsilon/c^2}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x}\left(u'_y f'_y + u'_z f'_z\right) = f'_x + \gamma\frac{\upsilon}{c^2}u_y\, f'_y$$

ومن تحويلات لورنس في زمن t = 0 ينتج أن:

$$x' = \gamma x \quad , \quad y' = y$$

وهكذا تكتب المعادلة الأخيرة بالصورة:

$$f_x = \frac{\gamma kqQ}{r'^3}\left(x + \frac{\upsilon}{c^2}uy\right) \qquad (26\text{-}6)$$

أما مركبة القوة باتجاه المحور y فهي:

$$f_y = \frac{f'_y/\gamma}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x} = \frac{f'_y/\gamma}{1-\upsilon^2/c^2} = \gamma f'_y$$

$$\therefore f_y = \frac{\gamma kqQy}{r'^3} \qquad (27\text{-}6)$$

وكذلك:
$$f_z = \frac{f'_z/\gamma}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x} = \gamma f'_z = 0$$

إذن القوة المؤثرة على الجسيم المشحون في محور الإسناد s تعتمد على سرعة الجسيم إذا كان اتجاهها عمودياً على حركة شحنة المصدر.

ولو فرضنا الآن أن $u = u_y = 0$ (أي أن الشحنة في حالة سكون) فان:
$$f_x = \frac{\gamma kqQx}{r'^3}$$

حيث أن:
$$r' = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2}$$

أي أن الجسيم المشحون في هذه الحالة تؤثر عليه قوة تعتمد على سرعة شحنة المصدر فقط.

إذا نظرنا الآن إلى العلاقة (6 – 26) بإمعان نلاحظ أن القوة f_x مكونة من جزئين هما:

- الأول يمثل قوة كهربائية مؤثرة على الجسيم تكتب بالصورة:

$$f_e = \frac{\gamma kqQx}{r'^3} \qquad (28\text{-}6)$$

- الثاني يمثل قوة مغناطيسية مؤثرة على الجسيم وتكتب بالصورة :

$$f_m = \frac{\gamma kqQ}{r'^3} \cdot \frac{u\upsilon}{c^2} y \qquad (29\text{-}6)$$

يلاحظ من الشكل (6 – 5) أن اتجاه المجال المغناطيسي $\vec{B}$ الذي تولده شحنة المصدر Q عند موقع شحنة الاختبار q هو باتجاه القارئ عمودي على الورقة. إذن القوة المغناطيسية تكون باتجاه الاحداثي x وتتناسب مع $\vec{u}\times\vec{B}$ أي أن:

$$\vec{f}_m = q(\vec{u}\times\vec{B}) \qquad (30\text{-}6)$$

$$\therefore f_m = quB$$

وبمقارنة المعادلتين (6 – 29)، (6 – 30) نستنتج أن:

$$B = \frac{\gamma kQ\left(\upsilon/c^2\right)y}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \qquad (31\text{-}6)$$

ومن العلاقتين (6 – 27)، (6 – 28) نلاحظ أن المجال الكهربائي المؤثر على شحنة الاختبار يساوي:

$$E=\frac{\gamma kQr}{\left(\gamma^2x^2+y^2\right)^{3/2}} \qquad (32\text{-}6)$$

حيث أن: $r=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$

يلاحظ الآن من الشكل (6 – 5) أن $\vec{B}$ باتجاه z و $\vec{E}$ باتجاه $\vec{r}$ عند موقع شحنة الاختبار q. لذا يكتب متجه كثافة الفيض المغناطيسي وشدة المجال الكهربائي بالصورة:

$$\vec{B}=\frac{\gamma kQ\left(\upsilon/c^2\right)y}{\left(\gamma^2x^2+y^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{E}=\frac{\gamma kQ}{\left(\gamma^2x^2+y^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{r}$$

إذ أن $\vec{k}$ وحدة المتجه باتجاه الاحداثي z وأن $\vec{r}$ متجه الموضع للشحنة Q. ولو دققنا النظر في المعادلة الأخيرة لكثافة الفيض المغناطيسي نجد أن الطرف الأيمن منها يتضمن المتجه $\upsilon y\,\vec{k}$ وهو مركبة المتجه $\vec{\upsilon}\times\vec{r}$ باتجاه z أي أن:

$$\vec{\upsilon}\times\vec{r}=\upsilon y\,\vec{k}$$

أما المركبتان الأخريان باتجاه x و y فكل منهما تساوي صفراً ويتضح ذلك من مفكوك حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{\upsilon}\times\vec{r}$.

تكتب $\vec{B}$ مرة أخرى لتأخذ الصيغة:

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\gamma kQ}{\left(\gamma^2x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{\upsilon}\times\vec{r}$$

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{\upsilon}\times\vec{E}$$

وطبقاً لهذه العلاقة الأخيرة فان متجه كثافة الفيض $\vec{B}$ يكون عمودياً على كل من $\vec{\upsilon}$ و $\vec{E}$ أي أنه عمودي على المستوى الذي يضم الإحداثيين x و y.

6 – 6 تحويلات المجالات الكهرومغناطيسية الناتجة من الشحنات الكهربائية المتحركة بسرعة ثابتة.

من الحقائق المعروفة أن هناك قوة تعتمد على سرعة الشحنات المتحركة. هذه القوة تقترن بمجال مغناطيسي مصدره التيارات الكهربائية أو حركة الشحنات. وقد بّينت تجربة اورستد أن التيارات الكهربائية تؤثر على المغانط إذا ما قُرِبت منها. بعد ذلك بزمن قليل كشف العالم أمبير وآخرون النقاب عن التفاعل بين التيارات الكهربائية ويتضح ذلك من تجاذب سلكين متوازيين يحمل كل منهما تياراً كهربائياً بنفس الاتجاه الذي يحمله الآخر.

نستطيع أن نفهم ما يخص التأثير المغناطيسي للتيارات الكهربائية على أنه نتيجة طبيعية لقانون كولوم أو فرضيات النظرية النسبية الخاصة التي أوضحت أن الشحنة تبقى دون تغيير في جميع محاور الإسناد لذا فان التأثيرات المغناطيسية هذه تظهر إلى حيز الوجود عندما يحصل تقارن كهربائي بين شحنة متحركة مع شحنات أخرى بالقرب منها، وقد نوقشت هذه الحالة في البند السابق من هذا الفصل.

عندما تتحرك شحنة كهربائية q بالقرب من سلك يحمل تياراً كهربائياً في محور إسناد معين فإنها تتعرض إلى مجالين كهربائي ومغناطيسي فتظهر قوة تؤثر عليها تسمى بقوة لورنس كما أوضحت التجارب وتكتب بالصيغة:

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{u}\times\vec{B} \qquad (33\text{-}6)$$

إذ أن $\vec{u}$ سرعة الشحنة في لحظة معينة وفي موقع معين وأن $\vec{B},\vec{E}$ شدة المجال الكهربائي وكثافة الفيض المغناطيسي المتولد عند ذلك الموقع على التوالي.

لقد تبين أن المغناطيسية تنشأ عن تغيرات نسبية في المجالات الكهربائية للشحنات المتحركة. ويتضح من ذلك أن مركبتي المجالين الكهربائي والمغناطيسي هما مركبتان لكيان واحد. وعليه فان المجال الكهرومغناطيسي يشمل $B_z, B_y, B_x, E_z, E_y, E_x$ وهي ستة مركبات، ويمكن التحسس بوجود المجال في محاور إسناد مختلفة. وقد تم توضيح كيفية حساب المجال الكهربائي في محاور

إسناد مختلفة في البند (6 – 3) من هذا الفصل. سنوضح في هذا البند كيفية تحويل المجالات الكهرومغناطيسية وقياسها من محور إسناد معين إلى آخر.

نفرض الآن جسيماً مشحوناً يتحرك في محور الإسناد s تحت تـــأثير مجـــال كهربائي شدته $\vec{E}$ ومجال مغناطيسي كثافة فيضه $\vec{B}$. فإذا كان مقدار الشحنة التـــي يحملها الجسيم تساوي q فان القوة المؤثرة عليه في هذا المحـــور تســـاوي تلـــك الممثلة بالعلاقة (6 – 33) حيث أن $\vec{u}$ سرعة الجسيم.

ولحساب $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للأحداثي `x علينا أن نحول القوة $\vec{f}$ إلى $\vec{f}'$ التي تساوى:

$$\vec{f}' = q\vec{E}' + q\vec{u}' \times \vec{B}' \qquad (34\text{-}6)$$

وهذه العلاقة تعطينا التعبير عن $\vec{E}$ و $\vec{B}$ بدلالة $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ وكذلك $\vec{\upsilon}$.

بعد إجراء عملية فك حاصل الضرب المتجهي $\vec{u} \times \vec{B}$ في المعادلـــة (6 – 33) من الممكن كتابة مركبات القوة $\vec{f}$ باتجاه الإحداثيات المتعامدة x، y،z وكالآتي:

$$f_x = q\left[E_x + \left(u_y B_z - u_z B_y\right)\right] \qquad (35\text{-}6)$$

$$f_y = q\left[E_y + \left(u_z B_x - u_x B_z\right)\right] \qquad (36\text{-}6)$$

$$f_z = q\left[E_z + \left(u_x B_y - u_y B_x\right)\right] \qquad (37\text{-}6)$$

ومن معادلات تحويل القوة من s إلى `s نجد أن:

$$f_x' = f_x - \frac{\upsilon/c^2}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x}\left(u_y f_y + u_z f_z\right) \qquad (38\text{-}6)$$

$$f_y' = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x\right)} \qquad (39\text{-}6)$$

$$f_z' = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x\right)} \qquad (40\text{-}6)$$

وتحويلات لورنس المتعلقة بالسرعة تعطي المعادلات الآتية:

$$u_x = \frac{u_x' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_x'} \qquad (41\text{-}6)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)} \quad (42\text{-}6)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)} \quad (43\text{-}6)$$

نبدأ الآن بالقوة f'_y كونها بسيطة لأجـراء الحسـابات والوصـول إلـى النتيجـة المطلوبة. وبعد تعويض قيمة f_y من المعادلة (6 – 36) في المعادلة (6 – 39) ومن ثُم الاستعاضة عن u_x و u_z بما يساويهما مـن المعـادلتين (6 – 41)، (6 – 43) نصل إلى التعبير الآتي:

$$f'_y = q\left[\gamma\left(E_y - \upsilon B_Z\right) + u'_Z B_x - u'_x \gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right)\right] \quad (44\text{-}6)$$

وإذا أخذنا المعادلة (6 – 34) التي تمثل القوة $\vec{f}'$ المؤثرة على الجسيم المشحون في محور الإسناد `s فان مركبة هذه القوة باتجاه الأحداثي y تساوي:

$$f'_y = q\left(E'_y + u'_Z B'_x - u'_x B'_Z\right) \quad (45\text{-}6)$$

وبمقارنة المعادلتين (6 – 44)، (6 – 45) نستنتج أن:

$$E'_y = \gamma\left(E_y - \upsilon B_z\right) \quad (46\text{-}6)$$

$$B'_x = B_x \quad (47\text{-}6)$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right) \quad (48\text{-}6)$$

إذن استطعنا الآن إيجاد ثلاثة من ستة مركبات تعود إلى المجالين الكهربـائي $\vec{E}$ وكثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ في محور الإسناد `s.

وبإتباع الخطوات السابقة نفسها لمركبة القوة f'_z يعطينا مركبتين أخريين هما:

$$E'_z = \gamma\left(E_z + \upsilon B_y\right) \quad (49\text{-}6)$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_Z\right) \quad (50\text{-}6)$$

ولإيجاد E'_x علينا أن نحسب f'_x بعد أن نعتبر الحالة الخاصة الآتية:

$$u_y = u_z = 0$$

أي أن الجسيم المشحون في محور الإسناد s يتحرك باتجاه الأحداثي x. إن هـذا الافتراض لا يؤثر على النتيجة التي نحاول الوصول إليها لأن معادلات التحويـل

الخاصة بالمجالات الكهرومغناطيسية لا تعتمد على سرعة الجسيم ولا على اتجاهه. هذا يعطينا مباشرة معادلة التحويل الأخيرة :

$$E'_x = E_x \tag{51-6}$$

وبإعادة جمع معادلات التحويل هذه تكتب بصورة نهائية كالآتي أولاً من `s إلى s ثُم من s إلى `s:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= \gamma\left(E'_y + \upsilon B'_Z\right) \\ E_z &= \gamma\left(E'_z - \upsilon B'_y\right) \\ B_x &= B'_x \\ B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{\upsilon}{c^2}E'_z\right) \\ B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{\upsilon}{c^2}E'_y\right) \end{aligned}\right\} \tag{52-6}$$

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma\left(E_y - \upsilon B_Z\right) \\ E'_z &= \gamma\left(E_z + \upsilon B_y\right) \\ B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_z\right) \\ B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right) \end{aligned}\right\} \tag{53-6}$$

وهكذا نرى أن مركبات $\vec{E}$ و $\vec{B}$ باتجاه الحركة لا تتأثر بالانتقال من محور إسناد إلى آخر، إلا أن المركبات العمودية على الحركة يحدث لها تغيير كما يظهر من معادلات التحويل التي يمكن اختزالها إلى أربع معادلات متجهية.

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}'_{II} &= \vec{E}_{II} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \\ \vec{B}'_{II} &= \vec{B}_{II} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{\upsilon}\times\vec{E}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (54\text{-}6)$$

إذ أن II و ⊥ تعني المركبات الموازية والعمودية علـــى الســـرعة $\vec{\upsilon}$ لتحـــويلات لورنس. أما التحويلات الأخرى من محور الإسناد `s إلى محور الإسناد s فهي:

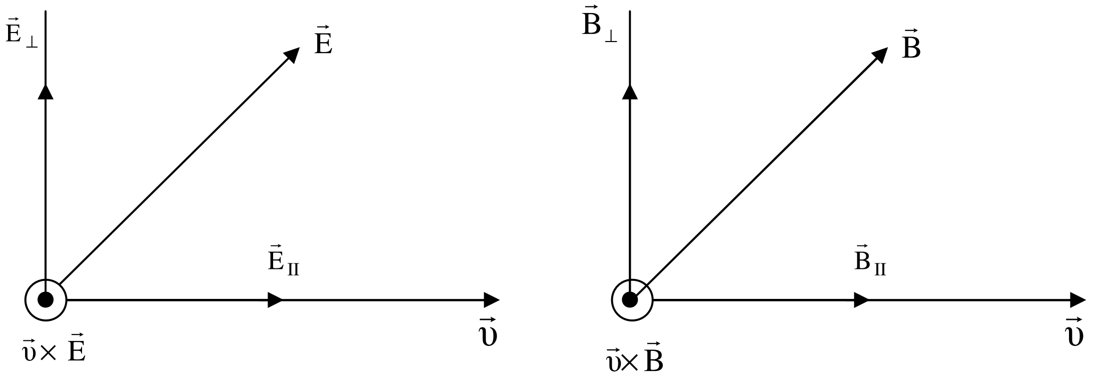
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_{II} &= \vec{E}'_{II} \\ \vec{E}_{\perp} &= \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - \vec{\upsilon}\times\vec{B}'\right) \\ \vec{B}_{II} &= \vec{B}'_{II} \\ \vec{B}_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{\upsilon}\times\vec{E}'\right) \end{aligned}\right\} \qquad (55\text{-}6)$$

نلاحظ بالنسبة لمشاهد ساكن أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{B}$ هما كميتان لا تعتمد أحداهما على الأخرى.

ولكن لمشاهد في حالة حركة نلاحظ أن المجال الكهربائي يتضـــمن أجـــزاءً لكلا المجالين الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{B}$ اللذين تم تحديدهما من قبل المشـــاهد الساكن.ومن الواضح أن ظهور مجال ما يعتمد على وجهة نظر المشاهد في محور إسناد معين وأنه لا يوجد تعبير بالمعنى الصحيح يسمى مجال كهربائي خـــالص أو مجال مغناطيسي خالص يمكن اعتباره كياناً قائماً بذاته لجميع المشاهدين في جميع محاور الإسناد. فالمجالان الكهربائي والمغناطيســـي يوصـــفان بأنهمـــا توأمـــان متلازمان.

إذا فرضنا الآن أن السُرع واطئة (أي $\upsilon << c$) فان القيمة (υ^2/c^2) تقتـــرب من الصفر أي أن $\gamma \approx 1$. ولهذه الحالة الخاصة يـــتم اختـــزال معـــادلات تحويـــل المجالات الكهرومغناطيسية لتُكتب بالصيغة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}'_{II} &= \vec{E}_{II} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} + \vec{\upsilon}\times\vec{B} \\ \vec{B}'_{II} &= \vec{B}_{II} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp} \end{aligned}\right\} \qquad (56\text{-}6)$$



الشكل (6 – 6): مركبات المجالين الكهربائي والمغناطيسي باتجاه موازٍ وعمودي على السرعة υ،
ويلاحظ اتجاه حاصل الضرب المتجهي بين كل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ مع السرعة $\vec{\upsilon}$.

والشكل (6 – 6) يبين مركبات المجالين $\vec{E}$، $\vec{B}$ وحاصل ضربهما المتجهي مع $\vec{\upsilon}$. ولقد وضعنا $E_z = B_z = 0$ مما يجعل $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_y$ و $\vec{B}_{\perp} = \vec{B}_y$ وكذلك $\left|\vec{\upsilon}\times\vec{E}\right| = \left(\vec{\upsilon}\times\vec{E}\right)_z$ و $\left|\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right| = \left(\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)_z$ وكما موضح في الشكل، وان $\vec{\upsilon}\times\vec{E}$ و $\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ هما دائماً عموديان على $\vec{\upsilon}$.

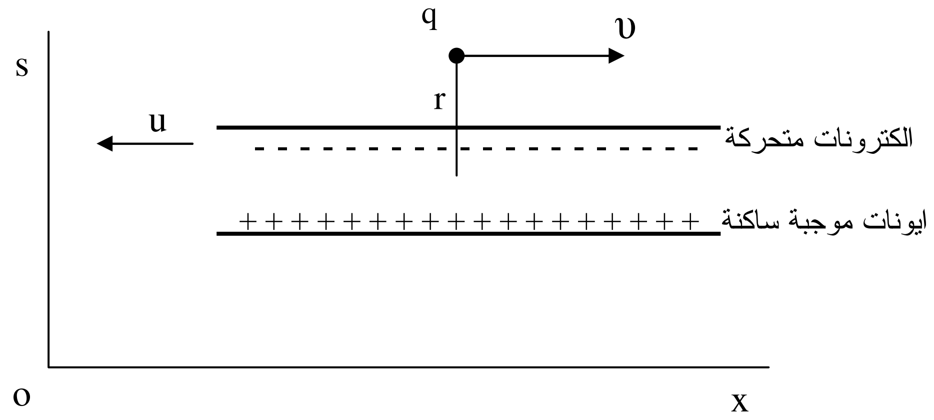
6 – 7 النسبية والتفاعلات الكهرومغناطيسية.

لقد أصبح معروفاً الآن من أن قانون كولوم هو الأساس في حساب القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنات الساكنة. ولكن إذا تحركت تلك الشحنات فان قوة جديدة تظهر لتُضاف إلى قوة كولوم هي القوة المغناطيسية وقد تم توضيح ذلك سابقاً. افترض آينشتاين في عام 1905 مستعيناً بنظريته النسبية أن هاتين القوتين الكهربائية والمغناطيسية تنشآن من القوة الكهربائية. وقد أُجريت تجارب كثيرة

تتعلق بهذه الدراسة وثبت أن العالم آينشتاين كان على صواب عندما وضع هذا الافتراض. إن هاتين القوتين تم تسميتهما معاً بالقوة الكهرومغناطيسية للترابط الوثيق فيما بينهما وأن ظهور قوة مغناطيسية يعطي تصحيحاً نسبياً لقانون كولوم.

إن جميع الظواهر المغناطيسية التي تحدث هي نتيجة قوى التبادل بين الشحنات الكهربائية المتحركة. فأية شحنة منفردة إذا كانت في حالة حركة تولد حولها مجالاً مغناطيسياً. أن هذا المجال يؤثر بقوة مغناطيسية على أية شحنة كهربائية أخرى متحركة فيه يضاف إليها القوة الكهربائية الساكنة (القوة الكهروستاتيكية) التي تظهر بين الشحنتين سواء كانتا في حالة حركة أم ساكنتين.

لم نتطرق لحد هذه اللحظة إلى التيارات الكهربائية التي تحملها أسلاك موصلة وكانت معظم دراستنا السابقة مقتصرة على الشحنات الكهربائية المنفردة. أما الآن فإننا سنوضح في هذا البند كيفية استنتاج القوة المغناطيسية من قانون كولوم وتأثيرات لورنس في النظرية النسبية.

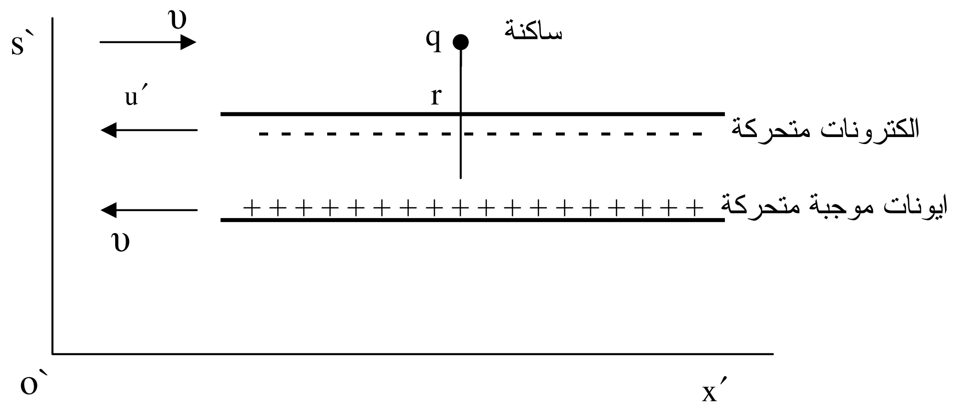


الشكل (6 – 6): سلك موصل يحوي الكترونات متحركة وايونات موجبة ساكنة في s. q شحنة نقطية متحركة. معدل القوة الكهربائية عليها يساوي صفراً.

طبقاً لقانون كولوم وكما موضح في الشكل (6 – 6) فان معدل القوة الكهربائية المؤثرة على شحنة q تتحرك بسرعة υ بالقرب من موصل يحمل تياراً كهربائياً في محور الإسناد s يساوي صفراً. لأن الشحنتين الخطيتين الموجبة والسالبة يزيل تأثير أحداهما الأخرى. وبموجب النظرية النسبية الخاصة فان معدل المسافة بين

الكترونات التوصيل التي تتحرك بسرعة انجراف تساوي υ ستقل بواسطة تقلص لورنس بمقدار $(1-u^2/c^2)^{+1/2}$. إذن كثافة الشحنة الخطية λ_- للأكترونات المتحركة في هذا المحور ستزداد بمقدار $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ فيما تبقى كثافة الشحنة الخطيـــة λ_+ للايونات الموجبة دون تغير أي أن $\lambda_+ = \lambda_0$ حيث أن λ_0 كثافة الشــحنة الخطيــة للأيونات الموجبة في حالة السكون.

لكي نصل إلى النتيجة ننقل الحدث الآن إلى محور الإسناد `s الذي يتحــرك بسرعة υ بالاتجاه الموجب للأحداثي x كما موضــح فــي الشــكل (6 – 7). إن المشاهد في هذا المحور يلاحظ أن q في حالة سكون وعلى بعد r من موقع السلك وأن الالكترونات تتحرك بسرعة u'. أما الأيونات الموجبة فتشاهد في حالة حركة بسرعة υ بالاتجاه السالب للأحداثي x.



الشكل (6 – 7): في محور الإسناد `s يلاحظ أن الالكترونات لا تزال في حالة حركة وأصبحت الايونات الموجبة تتحرك بالاتجاه السالب للاحداثي x. أما الشحنة q فهي في حالة سكون.

تُكتب كثافة الشحنات الخطية السالبة والموجبة في هذا المحور كالآتي:

$$\lambda_+ = \lambda_0 (1-\upsilon^2/c^2)^{-1/2} \qquad (57\text{-}6)$$

$$\lambda_- = -\lambda_0 (1-u'^2/c^2)^{-1/2} \qquad (58\text{-}6)$$

ومن تحويلات السرعة من s إلى `s فان:

$$u' = \frac{-u-\upsilon}{1+\frac{u\upsilon}{c^2}}$$

وبفرض أن $\frac{u}{c} << 1$ يحصل:

$$u' = -(u + \upsilon) \tag{59-6}$$

وبتعويض قيمة \`u من المعادلة (6 – 59) في المعادلة (6 – 58) ينتج:

$$\lambda_- = -\lambda_0 \left[1 - \frac{(u + \upsilon)^2}{c^2}\right]^{-1/2} \tag{60-6}$$

وإذا فرضنا أن λ الشحنة الكلية الخطية في السلك فان:

$$\lambda = \lambda_+ + \lambda_- \tag{61-6}$$

ومن قانون كاوس نجد أن شدة المجال الكهربائي E عند موقع الشحنة q تساوي:

$$E = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{2k}{r}(\lambda_+ + \lambda_-)$$

$$\therefore E = \frac{2k\lambda_0}{r}\left[\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{-1/2} - \left[1 - \frac{(u+\upsilon)^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right] \tag{62-6}$$

وبما أن $\frac{\upsilon}{c} << 1$ يكون:

$$\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} \tag{63-6}$$

وبتعويض الطرف الأيمن من المعادلة (6 – 63) في المعادلـــة (6 – 62) نحصـــل على:

$$E = \frac{2k\lambda_0}{r}\left\{\left(1 + \frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) - \left[1 + \frac{(u+\upsilon)^2}{2c^2}\right]\right\}$$

$$= -\left(\frac{k\lambda_0 u}{rc^2}\right)(2\upsilon + u)$$

ولأن $\upsilon >> u$ يكون:

$$E = -\frac{2k\lambda_0 u\upsilon}{rc^2} \tag{64-6}$$

إذن القوة المؤثرة على الشحنة q تساوي:

$$F = qE = -\frac{q\upsilon}{c}\left(\frac{2kI}{cr}\right) \tag{65-6}$$

حيث أن $I = \lambda_0 u$ ويساوي التيار المار في السلك. أما الإشارة السالبة في المعادلة (6 – 65) فتشير إلى أن القوة هي قوة تجاذب وتمثل القوة المغناطيسية بين شحنة متحركة وسلك يحمل تياراً كهربائياً. وبمقارنة المعادلة (6 – 65) مع المعادلة (6 – 33) نستنتج أن كثافة الفيض المغناطيسي B تساوي:

$$B = k\left(\frac{2I}{c^2 r}\right) \qquad (66\text{-}6)$$

نستنتج مما تقدم أنه بسبب عدم تساوي تقلص لورنس للشحنات الخطية الموجبة والسالبة فان السلك الذي يحمل تياراً كهربائياً يكون متعادل الشحنة في محور إسناد معين ولكنه يكون مشحوناً في محور إسناد آخر. نستنتج أيضاً أن الشحنة q تنجذب نحو السلك بقوة كهربائية خالصة في `s حيث يكون السلك مشحوناً وتكون الشحنة q في حالة سكون إلا أن القوة تلك لم تعد قوة كهربائية في s حيث يكون السلك متعادل الشحنة. وإذا أخذنا بالاعتبار القوة الكهربائية الساكنة (الكهروستاتيكية) مع النسبية فإننا نضمن وجود قوة أخرى هي القوة المغناطيسية. ومن الممكن أن نكتب المعادلة (6 – 65) بصيغة أخرى لتكون مألوفة لدينا أكثر إذا عوضنا عن c^2 وعن k بما يساويهما أي نكتب $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ و $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ فتتحول العلاقة (6 – 65) إلى:

$$F = -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) q\upsilon \qquad (67\text{-}6)$$

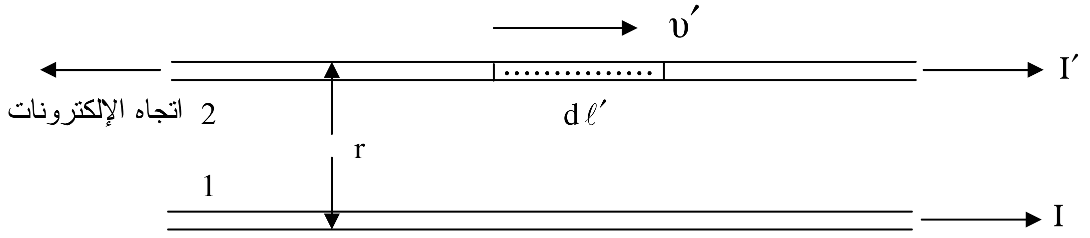
المقدار بين القوسين في المعادلة الأخيرة يمثل كثافة الفيض المغناطيسي لسلك موصل مستقيم وطويل وأن القوة F هي تلك التي نحصل عليها من قوة لورنس في محور الإسناد s [لاحظ المعادلة (6 – 33)].

أصبح الآن بامكاننا أن نحسب القوة المغناطيسية بين سلكين طويلين متوازيين المسافة بينهما r ويحمل الأول تياراً مقداره I ويحمل الثاني تياراً مقداره `I كما في الشكل (6 – 8). بما أن كثافة الشحنات السالبة والموجبة متساوية لهذين السلكين فانهما لا يولدان مجالاً كهربائياً ولكن كلاً منهما يولد مجالاً مغناطيسياً يؤثر على الآخر لوجود الكترونات حرة تتحرك داخل السلكين.

نبدأ بحساب القوة بالاستعانة بالعلاقة (6 – 67) التي تكتب بالصيغة:

$$F=-\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)\upsilon' dq' \qquad (68\text{-}6)$$

إذ أن dq' الشحنة الموجبة المتحركة بسرعة υ' باتجاه الأحداثي x وعلى بعد r عن موقع السلك الأول الذي يمر فيه تيار يساوي I.



الشكل (6 – 8): سلكان موصلان متوازيان أحدهما يحمل تياراً لايساوي التيار الذي يحمله الآخر، إلا أن التيارين باتجاه واحد.

إذا اعتبرنا هذه الشحنة تتحرك داخل السلك الثاني مولدة تياراً كهربائياً مقداره I' بالاتجاه الموضح في الشكل فان:

$$I'=\frac{dq'}{dt}$$

الآن $I'd\ell'$ هو عنصر التيار مأخوذ من السلك الثاني ويساوي:

$$I'd\ell'=\frac{dq'}{dt}d\ell'=\frac{d\ell'}{dt}dq'=\upsilon' dq'$$

وبتعويض $I'd\ell'$ بدلاً من $\upsilon' dq'$ تتحول العلاقة (6 – 68) إلى الصيغة:

$$F=-\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)I'd\ell' \qquad (69\text{-}6)$$

إذن القوة المؤثرة على السلك الثاني لوحدة الطول بسبب المجال المغناطيسي المتولد من السلك الأول تساوي:

$$f=\frac{F}{d\ell'}=-\frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \qquad (70\text{-}6)$$

وهذه القوة تؤثر في مستوى السلكين وأنها قوة تجاذب وذلك لأن التيارين I و I' هما باتجاه واحد. وتتحول هذه القوة إلى قوة تنافر إذا انعكس أحد التيارين في أي من السلكين. وبصورة عامة إذا مر تيار I في سلك قصير طوله ℓ يقع بالقرب

من سلك طويل يحمل تياراً يولد حوله مجالاً مغناطيسياً كثافة فيضه $\vec{B}$ عند موقـــع السلك القصير فان قوة التجاذب أو التنافر $\vec{F}$ بين السلكين يمكن كتابتها بالصـــيغة المتجهية الآتية:

$$\vec{F} = I(\vec{\ell} \times \vec{B}) \qquad (71\text{-}6)$$

وتجدر الإشارة إلى أن التيار I ليس متجهاً رغم أننا حددنا له اتجاهاً ليـــدل علـــى حركة الشحنات الموجبة وهو مصطلح يستخدم لاتجاه التيار وقد طبق في كثير من الكتب الحديثة. أما $\vec{\ell}$ فهو متجه باتجاه حركة الشحنات الموجبة . يتم تحديد اتجاه القوة $\vec{F}$ بواسطة قاعدة اليد اليمنى إذ أن الإبهام يشير إلى اتجاه القوة $\vec{F}$ عندما تلف بقية أصابع اليد من المتجه $\vec{\ell}$ إلى المتجه $\vec{B}$ وتقـــع $\vec{F}$ فـــي مســـتوى الســـلكين المتوازيين.

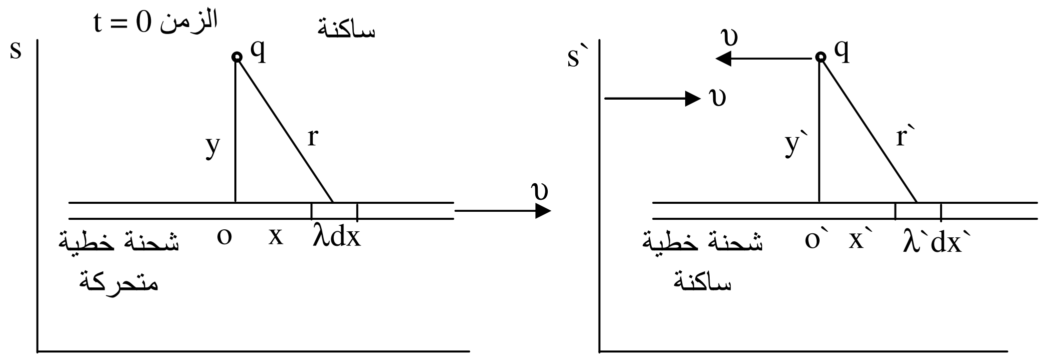
أمثلة محلولة

المثال (1):

شحنة خطية موجبة منطبقة على الاحداثي x تتحرك بسرعة منتظمة υ باتجاه الأحداثي x الموجب فإذا علمت أن λ تمثل الشحنة لوحدة الطول فأوجد:

أولاً: شدة المجال الكهربائي E في النقطة (0,y,0)، ثانياً: كثافة الفيض المغناطيسي عند النقطة نفسها، ثالثاً: نسبة كثافة الفيض المغناطيسي إلى شدة المجال الكهربائي، أي B/E.

الحل:



الشكل (6 – 9): شحنة نقطية q ساكنة بالقرب من شحنة خطية في حالة حركة في s. وينقل الحدث الى `s فتصبح الشحنة الخطية ساكنة والشحنة النقطية متحركة باتجاه موازٍ للشحنة الخطية.

أولاً: نفرض أن λdx عنصر الشحنة على بعد x من النقطة o في محور الإسناد s كما موضح في الشكل (6 – 9) ويبعد مسافة r عن الشحنة النقطية q في الموقع (0,y,0).

$$\therefore r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

إن عنصر الشحنة هذا في محور الإسناد `s يصبح $\lambda' dx'$. وبما أن الشحنة تبقى دون تغيير فان:

$$\lambda' dx' = \lambda dx$$

في محور الإسناد `s يمكننا تطبيق قانون كولوم لأن الشحنة الخطيــة فــي حالة سكون كما موضح في الشكل (6−9).

نفرض إذن أن dE' المجال المؤثر على الشحنة q من عنصر الشحنة $\lambda' dx'$ فيكون:

$$dE' = \frac{k\lambda' dx'}{r'^2} = \frac{k\lambda dx}{\left(x'^2 + y'^2\right)}$$

وبما أن:

$$y' = y \quad , \quad x' = \gamma x$$

$$\therefore\ dE' = \frac{k\lambda dx}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)}$$

هناك مجال أخر dE' يؤثر على الشحنة نفسها من عنصــر الشــحنة $\lambda' dx'$ على بعد `x يقع إلى يسار النقطة `o.

تكون محصلة المجال باتجاه الأحداثي x مساوية صفراً أما باتجاه الأحداثي y فإنها تساوي:

$$dE'_y = \frac{2\, k\lambda\, dx}{\gamma^2 x^2 + y^2} \cdot \frac{y'}{r'}$$

$$= \frac{2k\lambda y dx}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\therefore\ E'_y = \int_0^\infty \frac{2k\lambda y dx}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{2\,k\lambda}{\gamma y}$$

وبما أن $E_y = \frac{2\,k\lambda}{y}$ فإن $E'_y = \frac{1}{\gamma} E_y$

ثانياً: ولحساب كثافة الفيض المغناطيسي B عنــد النقطــة (0,y,0) نطبــق قانون أمبير الدائري باعتبار أن تياراً كهربائياً مقداره $I = \lambda\upsilon$ يتحرك باتجاه الأحداثي x الموجب فإنه يولد مجالاً مغناطيسياً حوله.

وبتطبيق قانون أمبير نحصل على:

$$B = \frac{\mu_0 \lambda \upsilon}{2\pi y}$$

واتجاه هذا المجال عند تلك النقطة عمودي على الورقة باتجاه القارئ في محور الإسناد s.

$$\therefore B = \frac{2k\lambda \upsilon}{c^2 y}$$

ثالثاً: تكون النسبة B/E مساوية إلى:

$$\frac{B}{E} = \frac{2k\lambda\upsilon}{c^2 y} \cdot \frac{y}{2k\lambda}$$

$$\therefore \frac{B}{E} = \frac{\upsilon}{c^2}$$

المثال (2):

استنتج علاقة لنصف قطر مدار جسيم كتلته الساكنة m_0 وشحنته q يتحرك بطاقة حركية تساوي T وبسرعة نسبية عمودية على مجال مغناطيسي كثافة فيضه B.

الحل:

إن القوة المؤثرة على الجسيم تساوي:

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} \qquad (1)$$

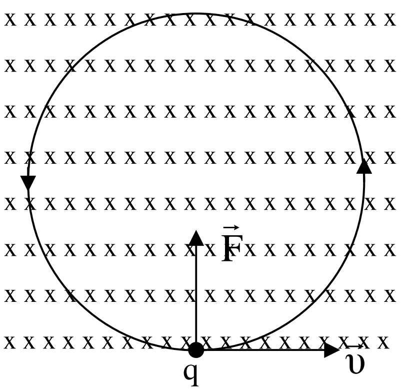
إذ أن $\vec{\upsilon}$ سرعة الجسيم وهي عمودية على $\vec{B}$. وإذا كان المجال المغناطيسي منتظماً فان الجسيم يسلك مساراً دائرياً كما موضح في الشكل (6 – 10) ويتعرض لقوة جذب مركزي لذا فان:

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = q\upsilon B$$

وإذا فرضنا أن p هو زخم الجسيم يكون:

$$p = m\upsilon$$

$$\therefore p = qBr \qquad (2)$$



الشكل (6 – 10): جسيم يحمل شحنة كهربائية يتحرك ضمن مجال مغناطيسي منتظم اتجاهه عمودي على اتجاه سرعة الجسيم.

وبما أن:

$$\varepsilon^2 = (cp)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$= (T + m_0c^2)^2$$

$$\therefore (cp)^2 = T^2 + 2Tm_0c^2 \quad (3)$$

ومن هذه العلاقة نكتب:

$$Brqc = cp = \sqrt{T^2 + 2Tm_0c^2} \quad (4)$$

$$\therefore Br = \frac{1}{qc}\sqrt{T^2 + 2Tm_0c^2} \quad (5)$$

المثال (3):

ما كثافة الفيض المغناطيسي الذي نحتاجه لحجز بروتونات بطاقة 100MeV في مدار نصف قطره 10m علماً بأن طاقة السكون للبروتون تساوي 938 MeV.

الحل:

إذا كانت وحدة قياس كثافة الفيض المغناطيسي B في المثال (2)، العلاقة (4)، هي التسلا فإن المقدار تحت الجذر التربيعي يقدر بوحدات قياس الجول أي أن الطاقة الحركية T وطاقة السكون m_0c^2 تكون وحدة قياسهما الجول. وإذا قيست هاتان الكميتان بوحدات قياس MeV ينبغي تحويل الطرف الأيسر من هذه المعادلة إلى MeV. وعلينا أن نستخدم التحويل الآتي:

$$1\text{MeV} = 1.6\times10^{-13}\ \text{J}$$

إذن تكتب المعادلة (5) بالصيغة:

$$Br = \left(\frac{1.6\times10^{-13}}{qc}\right)\sqrt{T^2 + 2Tm_0c^2}$$

$$= \left(\frac{1.6\times10^{-13}}{1.6\times10^{-19}\times3\times10^{8}}\right)\sqrt{(100)^2 + 2(100)(938)}$$

$$\therefore\ Br = 1.5$$

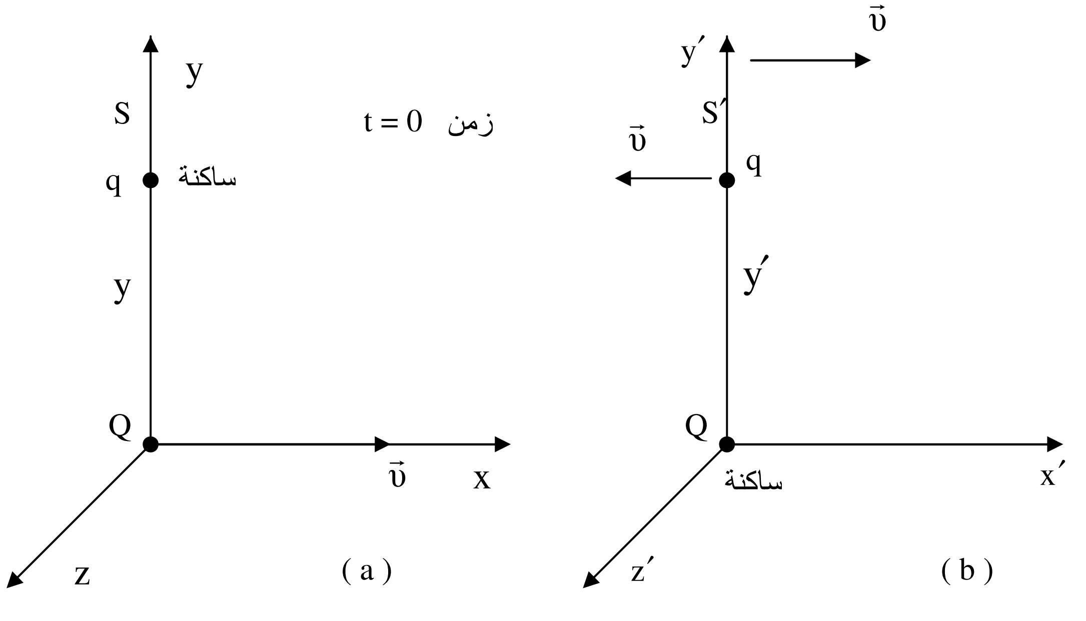
$$\therefore\ B = 0.15\ T^{*}$$

* T – هي وحدة قياس الفيض المغناطيسي (تسلا).

المثال (4):

q شحنة اختبار ساكنة في الموقع (0,y,0) في محور الإسناد s و Q شحنة المصدر تتحرك بسرعة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الأحداثي x وتمر في زمن t = 0 من نقطة الأصل. جد القوة التي تؤثر على شحنة الاختبار في تلك اللحظة.

الحل:



الشكل (6 – 11): (a) شحنة المصدر متحركة وشحنة الاختبار ساكنة. (b) نُقل الحدث إلى محور إسناد آخر حيث يشاهد أن شحنة المصدر ساكنة وشحنة الاختبار في حالة حركة وبهذا يمكن تطبيق قانون كولوم.

لا يمكن تطبيق قانون كولوم لحساب القوة المؤثرة على شحنة الاختبار q في محور الإسناد s ذلك لأن شحنة المصدر في حالة حركة. وعليه ننقل الحدث إلى محور الإسناد `s كما موضح في الشكل (b 11 – 6). في هذا المحور نلاحظ أن شحنة المصدر ساكنة وشحنة الاختبار تتحرك بسرعة $\vec{\upsilon}$ باتجاه الأحداثي x السالب. أما في الشكل (a 11 – 6) فنلاحظ أن شحنة الاختبار في حالة سكون وشحنة المصدر متحركة.

إذن من الممكن تطبيق قانون كولوم في `s لحساب مركبات القوة المؤثرة على الشحنة q في الموقع (0,y`,0) وهي:

$$f'_x = f'_z = 0,\ f'_y = \frac{kqQ}{y'^2}$$

وبما أن:

$$f'_x = \frac{f_x - \frac{\upsilon}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{f})}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}$$

$$f'_y = \frac{f_y/\gamma}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}$$

$$f'_z = \frac{f_z/\gamma}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\upsilon^2/c^2)}}$$

فان مركبات القوة المؤثرة على q في محور الإسناد s تساوي:

$$f_x = f_z = 0$$

$$f_y = \frac{f'_y/\gamma}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x} = \frac{f'_y/\gamma}{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)} = \gamma f'_y$$

وفي زمن $t = 0$ فإن:

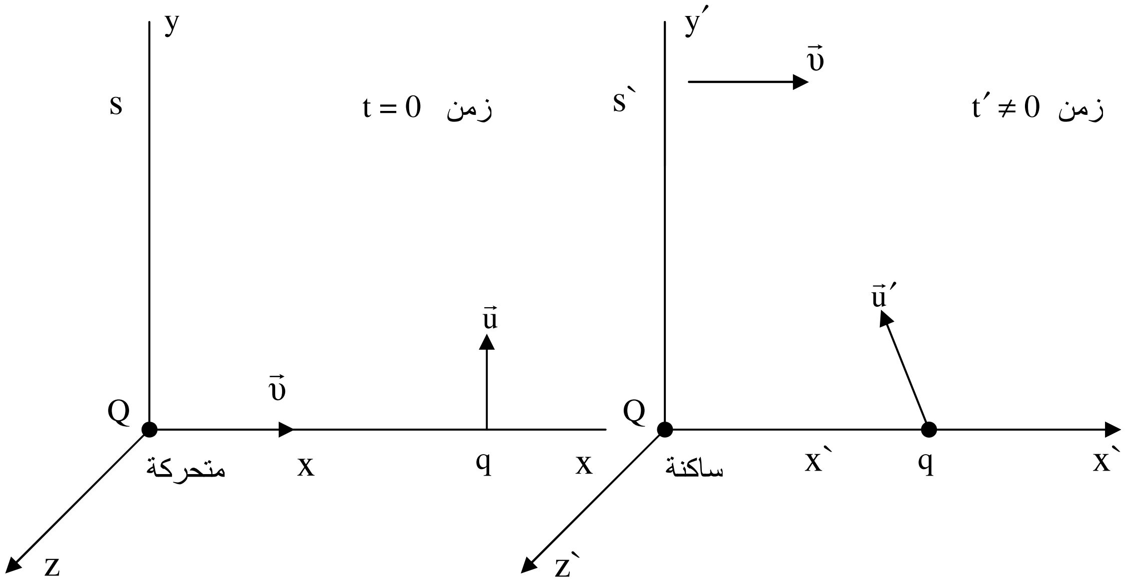
$$x' = \gamma x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$

$$\therefore f_y = \gamma \frac{kqQ}{y^2}$$

المثال (5):

شحنة نقطية مقدارها Q في الموقع (0,0,0) في زمن $t = 0$ تتحرك باتجــاه الأحداثي x بسرعة مقدارها $\vec{\upsilon}$ في محور الإسناد s. شحنة نقطية أخرى q في الموقع (x,0,0) تتحرك باتجاه مواز للأحداثي y بسرعة تساوي u. احسب القوة المؤثرة على الشحنة q.

الحل:



الشكل (6 – 12): شحنة المصدر وشحنة الاختبار يتحركان باتجاهين متعامدين في s وكل منهما يمتلك سرعة مختلفة بالمقدار عن الآخر. في `s تصبح شحنة المصدر ساكنة وتبقى شحنة الاختبار متحركة.

في محور الإسناد s نجد أن:

$$u_x = u_z = 0 \quad ، \quad u_y = u$$

$$f_y = f_z = 0 \quad ، \quad \vec{u}.\vec{f} = u_x f_x + u_y f_y + u_z f_z = 0$$

وبالاستعانة بتحويلات السرعة من s إلى `s نحصل على:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x} = -\upsilon$$

$$u'_y = u_y/\gamma = \frac{1}{\gamma} u$$

$$u'_z = u_z/\gamma = 0$$

ومن تحويلات القوة من s إلى `s نجد أن:

$$f'_x = \frac{f_x - \frac{\upsilon}{c^2}(\vec{u}.\vec{f})}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x} = f_x = \frac{kqQ}{x'^2}$$

$$f'_y = f_y/\gamma = 0$$

$$f'_z = f_z/\gamma = 0$$

وبما أن $x' = \gamma x$ في زمن $t = 0$ فان:

$$f_y = 0$$

$$f_z = 0$$

$$f_x = \frac{kqQ}{\gamma^2 x^2}$$

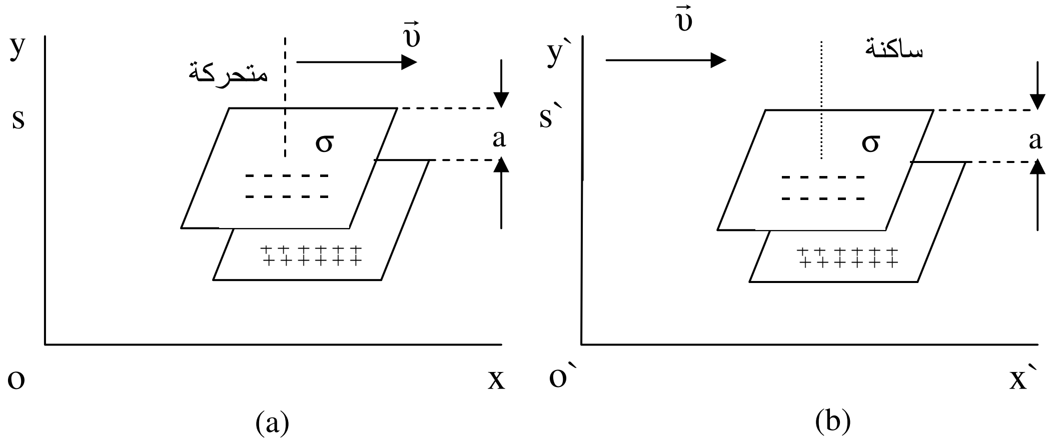
إذن القوة لا تعتمد في هذه الحالة على سرعة شحنة الاختبار إذا كان اتجاهها في زمن $t = 0$ عمودياً على الأحداثي x.

المثال (6):

متسعة ذات لوحين متوازيين عموديين على الأحداثي الرأسي y. شحنت المتسعة وكانت كثافة الشحنة السطحية على اللوحين $\pm\sigma$ فإذا تحركت المتسعة بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للأحداثي x احسب المجالات الكهربائية والمغناطيسية المتولدة نتيجة الحركة.

الحل:

نعتبر أن المتسعة في محور الإسناد s وأن مشاهداً في هذا المحور يلاحظ أنها تتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموضح في الشكل (6 – 13 a).



الشكل (6 – 13): (a) لوحان مشحونان موازيان للاحداثي x وهما في حالة حركة. (b) نقل الحدث الى محور إسناد آخر حيث يشاهد اللوحان المتوازيان في حالة سكون.

في محور الإسناد `s الذي يتحرك بسرعة $\vec{\upsilon}$ نسبة لمحور الإسناد s فان المتسعة تكون في حالة سكون. وفي هذه الحالة تكون الشحنات الكهربائية على اللوحين ساكنة وأي مشاهد في `s لا يشعر بوجود أي مجال مغناطيسي ولكن هناك مجالاً كهربائياً باتجاه الاحداثي `y كما موضح في الشكل (6 – 13 b) إذن في محور الإسناد `s نجد أن:

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0$$

$$E'_x = E'_z = 0 \quad ، \quad E'_y = E'$$

حيث أن E' المجال الكهربائي المتولد بين لوحي المتسعة.

ومن معادلات تحويل المجالات الكهرومغناطيسية من `s إلى s نكتب:

$$E_x = E'_x = 0$$

$$E_y = \gamma\left(E'_y + \upsilon B'_z\right) = \gamma E'$$

$$E_z = \gamma\left(E'_z - \upsilon B'_y\right) = 0$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{\upsilon}{c^2}E'_z\right) = 0$$

$$B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{\upsilon}{c^2}E'_y\right) = \gamma\left(\frac{\upsilon}{c^2}\right)E' \qquad (1)$$

إن هذه النتائج التي حصلنا عليها من معادلات التحويل تتضح أكثر إذا اعتبرنا المجال الكهربائي في محور الإسناد `s.

بما أن المتسعة ساكنة يكون :

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \qquad (2)$$

حيث أن `σ كثافة الشحنة السطحية على اللوحين المتوازيين. الآن في محور الإسناد s نلاحظ أن مساحة اللوحين أصغر بمقدار $\frac{1}{\gamma}$ ولكنهما يحملان الشحنة نفسها فتكون كثافة الشحنة السطحية σ أكبر من `σ بمقدار γ أي أن:

$$\sigma = \gamma\sigma' \qquad (3)$$

لذا فإن المجال الكهربائي E يكون أكبر من E' بمقدار γ، أي أن:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\gamma\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma E' \qquad (4)$$

إذا فرض الآن أن φ' فرق الجهد بين طرفي اللوحين في `s فإن:

$$E' = \frac{\varphi'}{a} \qquad (5)$$

إذ أن a المسافة بين اللوحين. وهذه المسافة تبقى دون تغيير في محور الإسناد s و `s لأنها منطبقة على الأحداثي الرأسي y.

وبمقارنة المعادلتين (3)، (4) ينتج:

$$\left.\begin{aligned} E' \ a &= \varphi' \\ E \ a &= \gamma\varphi' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

نستنتج من العلاقة (5) أن الجهد بين اللوحين في s هو أعلى من الجهد بينهما في `s بمقدار γ.

الآن ماذا عن المجالات المغناطيسية المتولدة نتيجة حركة المتسـعة. ولتوضيح ذلك علينا أن نتذكر أن هناك تيارات كهربائية سـطحية تتولـد متحركة بموازاة الأحداثي x. وتعرف كثافة التيار السطحي j_s بأنها كميـة الشحنة التي تمر في الثانية بصورة عمودية على وحدة الأطوال مـأخوذة من السطح. وبموجب هذا التعريف فان:

$$j_s = \sigma\upsilon \qquad (7)$$

وبواسطة قاعدة اليد اليمني فان المجال المغناطيسي المتولد يكون بالاتجـاه الموجب للأحداثي z ويحسب مقداره من قانون أمبير فيكون:

$$B_z = \mu_0 j_s = \mu_0 \sigma\upsilon$$

$$\therefore B_z = \mu_0(\gamma\sigma')\upsilon = \gamma(\epsilon_0\,\mu_0)\upsilon E'$$

وبما أن: $\epsilon_0\,\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

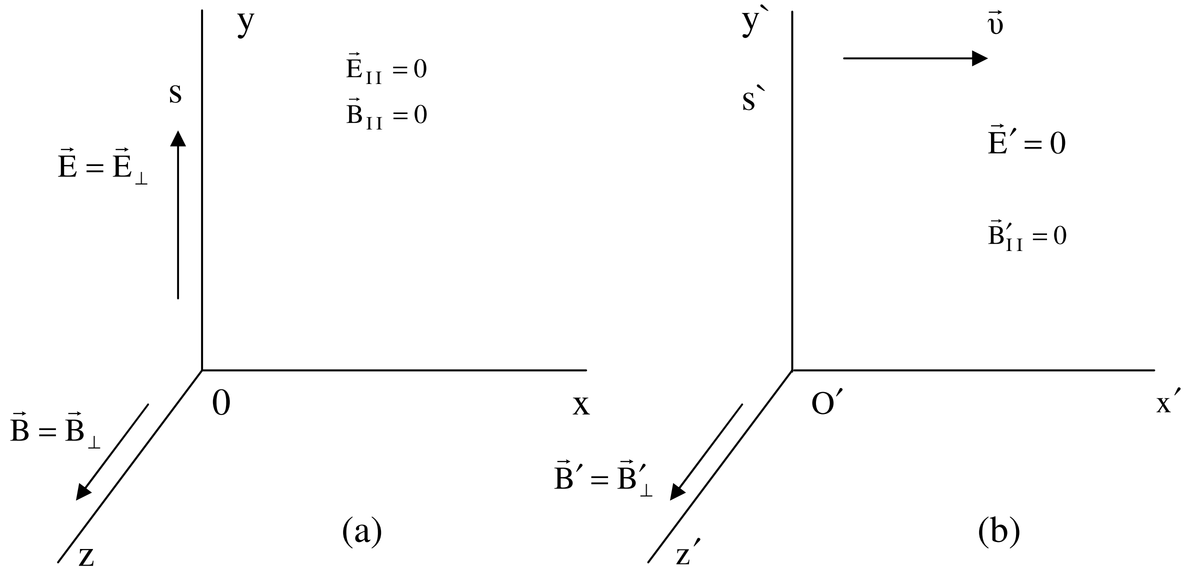
$$\therefore B_z = \gamma\left(\frac{\upsilon}{c^2}\right)E'$$

وهذه العلاقة الأخيرة هي العلاقة نفسها (1) التي حصلنا عليهـا باسـتخدام معادلات تحويل المجالات الكهرومغناطيسية.

المثال (7):

خطوط قوى كهربائية شدتها $\vec{E}$ تنتشر بصورة عمودية على خطـوط قـوى مغناطيسية كثافة فيضها $\vec{B}$. فإذا علمت أن هذه المجالات الكهرومغناطيسية تقع في المستويين xy و xz في محور الإسناد s. جد محور إسناد آخـر `s حيث تنعدم فيه خطوط القوى الكهربائية.

الحل:



الشكل (6 – 14): (a) المجال الكهربائي وكثافة الفيض المغناطيسي متعامدان على بعضهما وعموديان علي الاحداثي x. (b) المجال الكهربائي يساوي صفراً وكثافة الفيض المغناطيسي عمودي علي الاحداثي `x.

بما أن E عمودية على $\vec{B}$ وكلاهما عموديان على الأحداثي x في محـــور الإسناد s يحصل أن:

$$\vec{E}_{II}=0 \quad ، \quad \vec{E}=\vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{B}_{II}=0 \quad ، \quad \vec{B}=\vec{B}_{\perp}$$

لنفرض الآن أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ باتجاه الأحداثي الرأسي y والمجـــال المغناطيسي $\vec{B}$ باتجاه الأحداثي z كما موضح في الشكل (6 – 14 a). أمـــا الشكل (6 – 14 b) فيوضح محور الإسناد `s وفيه يشـــاهد أن $\vec{E}'=0$ وأن $\vec{B}'\neq 0$.

وباستخدام معادلات تحويل المجالات الكهرومغناطيسية من s إلى `s نكتب:

$$\vec{E}'_{II}=\vec{E}_{II}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}_{\perp}\right) = 0 \quad (2)$$

$$\vec{B}'_{II} = \vec{B}_{II} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{\upsilon}\times\vec{E}_{\perp}\right) \quad (4)$$

من المعادلة (2) يكون:

$$\vec{E}_{\perp} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}_{\perp} = \vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B} = 0$$

$$\therefore -\vec{E} = \vec{\upsilon}\times\vec{B} \quad (5)$$

وبضرب طرفي المعادلة (5) بكثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ ضرباً متجهياً يحصل:

$$\vec{E}\times\vec{B} = \vec{B}\times(\vec{\upsilon}\times\vec{B})$$

$$= (\vec{B}.\vec{B})\,\vec{\upsilon} - (\vec{B}.\vec{\upsilon})\,\vec{B}$$

وبما أن المتجه $\vec{\upsilon}$ عمودي على $\vec{B}$ كما موضح في الشكل (6 – 14 a) ينتج أن:

$$\vec{E}\times\vec{B} = B^2\vec{\upsilon}$$

نستنتج إذن أنه إذا كانت سرعة محور الإسناد `s تساوي $\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$ نسبة لمحور الإسناد s فان أي مشاهد في هذا المحور يلاحظ انعدام المجالات الكهربائية ويشعر فقط بوجود مجالات مغناطيسية.

المثال (8):

جسيم يحمل شحنة كهربائية q، تحرك من السكون في الموقع (0,0,0) تحت تأثير مجال كهربائي منتظم $\vec{E}_y = \vec{E}$ ومجال مغناطيسي منتظم $\vec{B}_z = \vec{B}$. جد المسار الذي يسلكه الجسيم المشحون مستخدماً عملية تحويل إلى نظام إحداثيات جديد يلاحظ المشاهد فيه أن $\vec{E} = 0$.

جد المسار في ذلك النظام أولاً ثم استخدم مرة أخرى عملية التحويل للرجوع إلى النظام الأصلي. اعتبر أن $\upsilon << c$.

الحل:

يمكننا استخدام معادلات التحويل (6 – 56)، وعلية نكتب:

$$\vec{E}'_{II} = E_{II} = 0$$

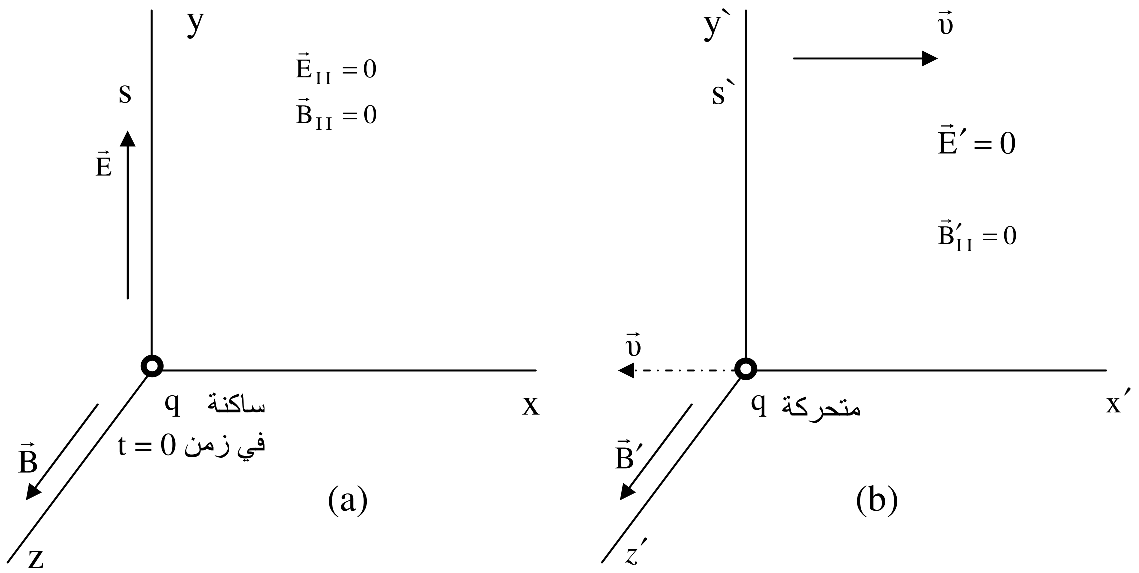
$$\vec{B}'_{II} = \vec{B}_{II} = 0$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}_{\perp} = 0$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp}$$

ومن الشــكل (6 – 15 a) نلاحــظ أن $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}$ باتجــاه الأحــداثي y و أن $\vec{B}_{\perp} = \vec{B}$ باتجاه الأحداثي z.

$$\therefore \vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B} = 0 \qquad (1)$$



الشكل (6 – 15): (a) شحنة نقطية ساكنة q في نقطة الأصل تحت تأثير مجالين متعامدين كهربائي E ومغناطيسي B. (b) الشحنة النقطية q في حالة حركة تحت تأثير مجال مغناطيسي فقط عمودي علي حركة الشحنة.

ومن العلاقة (1) نجد أن السرعة υ تساوي بالمقدار:

$$\upsilon = \frac{E}{B} \qquad (2)$$

في محور الإسناد S' الموضح في الشكل (b 15 – 6) نستنتج أن:

$$\vec{E}' = 0$$

$$\vec{B}'_{II} = 0$$

$$\vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp} = \vec{B}$$

القوة المؤثرة على الجسيم في `s هي قوة مغناطيسية خالصـــة. لـــذا فـــان الجسيم يتحرك في دائرة في المستوى $x'y'$ نصف قطرها R تحـــت تـــأثير قوة مركزية وبسرعة ثابتة بالمقدار تساوى υ.

$$\therefore\ q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

وبما أن $\upsilon = \omega R$ حيث أن ω السرعة الزاوية للجسيم يكون:

$$\omega = \frac{qB}{m} \qquad (3)$$

فالقوة المؤثرة على الجسيم في أي زمن `t في `s تساوي:

$$\vec{F}' = q\vec{u}' \times \vec{B}'$$

إذ أن $\vec{u}'$ سرعة الجسيم الذي يتحرك في دائرة وتساوي بالمقدار υ.

وبفك حاصل الضرب المتجهي $\vec{u}' \times \vec{B}'$ نحصل على:

$$\frac{\vec{F}'}{q} = \vec{i}\left(u'_y B'_z - u'_z B'_y\right) + \vec{j}\left(u'_z B'_x - u'_x B'_z\right) + \vec{k}\left(u'_x B'_y - u'_y B'_x\right)$$

$$\therefore \frac{\vec{F}'}{q} = \vec{i}\, u'_y B'_z - \vec{j}\, u'_x B'_z$$

ولكن:

$$B'_z = B'_{\perp} = B$$

$$u'_y = \dot{y}' \text{،}\ \ u'_x = \dot{x}'$$

$$\therefore \frac{m}{q}\ddot{x}' = B\dot{y}'$$

$$\frac{m}{q}\ddot{y}' = -B\dot{x}'$$

ومن العلاقة (3) نكتب المعادلتين الأخيرتين بالصيغة الآتية:

$$\ddot{x}' = \omega \dot{y}' \qquad (4)$$

$$\ddot{y}' = -\omega \dot{x}' \qquad (5)$$

وبالاستعانة بتحويلات لورنس بفرض أن $c >> \upsilon$ نجد أن:

$$x' = (x - \upsilon t)$$

$$\dot{x}' = \dot{x} - \upsilon \text{ ، } \ddot{x}' = \ddot{x}$$

$$y' = y$$

$$\dot{y}' = \dot{y}$$

وبتعويض هذا التحويل في المعادلتين (4)، (5) نحصل على:

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{x}\right) \qquad (7)$$

حيث أن $\upsilon = E/B$ من العلاقة (2)

من الممكن حل هاتين المعادلتين التفاضليتين آنياً وذلك بأن نفاضل طرفي المعادلة (6) مع الزمن t ومن ثم نعوض عن $\ddot{y}$ بما يساويها في المعادلة (7)، ثم نقوم بحل المعادلة التفاضلية المتضمنة $\dot{x}$ ومشتقاتها بالطرق الرياضية المعروفة فنحصل بالنهاية على الحل الآتي:

$$y = c_1 \cos \omega t - c_2 \sin \omega t + c_3 \qquad (8)$$

$$x = c_2 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t + \frac{E}{B} t + c_4 \qquad (9)$$

وفي زمن t = 0 يكون الجسيم في نقطة الأصل، ولحظياً في حالة سكون، ومن هذه الشروط الابتدائية نكتب:

$$\dot{y} = \dot{x} = 0$$

$$y = x = 0$$

وهذه الشروط تحدد قيم الثوابت الأربعة c_4, c_3, c_2, c_1.

$$\therefore x = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t) \qquad (10)$$

$$y = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \qquad (11)$$

وبما أن:

$$\upsilon = \omega R = \frac{E}{B} \qquad (12)$$

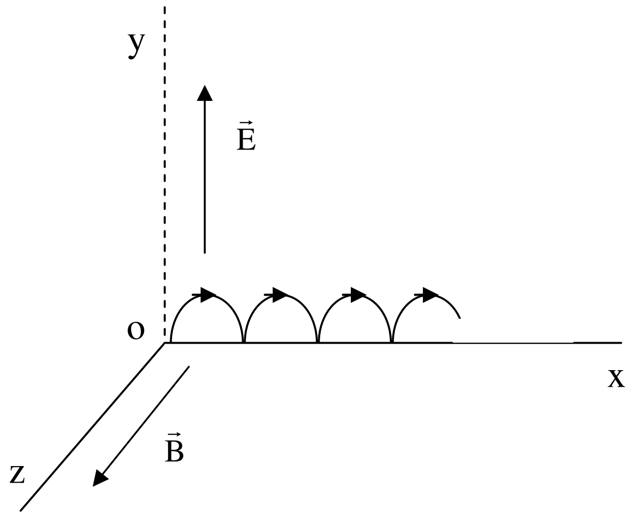
$$\therefore R = \frac{E}{\omega B} \qquad (13)$$

وبحذف الحدود المثلثية المتضمنة $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ واستخدام المتطابقة $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ نجد أن:

$$(x - R\omega t)^2 + (y - R)^2 = R^2 \qquad (14)$$

وهذه معادلة الدائرة التي نصف قطرها R، ومركزها يقع في النقطة $(R\omega t, R, 0)$ ويتحرك باتجاه الأحداثي x بسرعة ثابتة ممثلة بالمعادلة (12).

نستنتج مما تقدم أن الجسيم يتحرك كما لو كان نقطة على محيط عجلة نصف قطرها R تتدحرج باتجاه الأحداثي x بسرعة ثابتة تساوي υ وترسم تلك النقطة خلال حركتها منحنياً موضحاً في الشكل (6 – 16) يسمى السايكلويد.



الشكل (6 – 16): منحنى السايكلويد الذي يرسمه الجسيم المشحون تحت تأثير مجالين متعامدين كهربائي ومغناطيسي.

تمارين الفصل السادس

1. شحنة نقطية Q في نقطة الأصل (0,0,0) في زمن $t = 0$ تتحرك باتجاه الأحداثي x بسرعة مقدارها υ في محور الإسناد s. جد القوة المؤثرة على شحنة نقطية q في حالة سكون في هذا المحور تقع في النقطة (x,0,0)

ج : $f_y = f_z = 0, f_x = \frac{kqQ}{\gamma^2 x^2}$

2. شحنتان نقطيتان q و Q تتحركان بنفس السرعة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للأحداثي x في محور الإسناد s. احسب القوة التي تسلطها الشحنة Q على q علماً بأن إحداثيات الشحنتين q و Q هي (x,y,0) و (0,0,0) على التوالي.

3. شحنة نقطية Q في نقطة الأصل في محور الإسناد s تتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للأحداثي x. جد القوة المؤثرة على شحنة نقطية أخرى q تقع على الأحداثي x على بعد ℓ من الشحنة Q وتتحرك بسرعة منتظمة $\vec{\upsilon}$ بالاتجاه الموجب للأحداثي x.

ج : $f_y = f_z = 0, f_x = \frac{kqQ}{\gamma^2 \ell^2}$

4. إذا علمت أن $\vec{E}$ و $\vec{B}$ مجالان كهربائي ومغناطيسي في المحاور المختبرية. وضح تحت أي شروط يحتمل أن نجد (1) محور إسناد يكون فيه $\vec{E}$ أو $\vec{B}$ مساوياً صفراً، (2) محور إسناد يكون فيه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ باتجاهين متوازيين وليكن الاتجاه المنطبق على الأحداثي y، (3) محور الإسناد يكون فيه $\vec{E}$ عمودياً على $\vec{B}$.

5. شحنة نقطية Q في نقطة الأصل في زمن $t = 0$ تتحرك بالاتجاه الموجب للأحداثي x بسرعة مقدارها υ في محور الإسناد s. شحنة نقطية أخرى q في الموقع (0,b,0) تتحرك باتجاه موازٍ للأحداثي x بسرعة منتظمة تساوي u. احسب القوة المؤثرة على الشحنة q.

ج: $f_x = f_z = 0,\ f_y = \dfrac{\gamma kqQ}{b^2}\left(1-\dfrac{\upsilon}{c^2}u\right)$

6. متسعة ذات لوحين متوازيين، ساكنة في محور الإسناد s وتميل بزاوية 45^0 مع الأحداثي الأفقي x. تحمل المتسعة كثافة شحنة سطحية على اللوحين $\pm\sigma$. محور الإسناد `s يتحرك بسرعة تساوي $\vec{\upsilon}$ نسبة لمحور الإسناد s.

أولاً: جد $\vec{E}$ المجال الكهربائي في s.

ثانياً: جد $\vec{E}'$ المجال الكهربائي في `s.

ثالثاً: ما هي الزاوية التي يصنعها اللوحان مع الأحداثي الأفقي `x؟

رابعاً: هل أن المجال الكهربائي في `s عمودي على اللوحين؟

7. احسب القوة المقاسة من قبل مشاهد في المحاور المختبرية بين إلكترونين يتحركان جنباً إلى جنب على خطين متوازيين المسافة بينهما 1mm إذا كان كل منهما يحمل طاقة حركية مساوية إلى: أولاً: 1eV، ثانياً: 1MeV.

ج: $(1)\,2.31\times10^{-22}\,N$

$(2)\,7.80\times10^{-23}\,N$

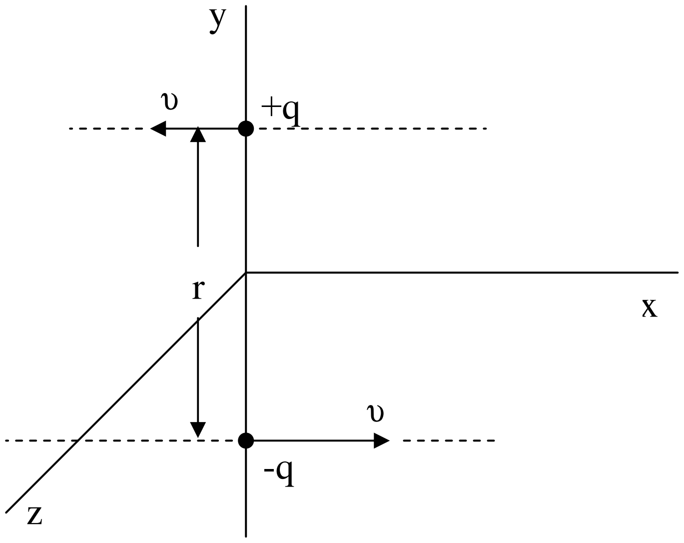
8. استنتج مستخدماً معادلات تحويل المجالات الكهربائية والمغناطيسية أن الكميتين (B^2-E^2/c^2) و $(\vec{B}.\vec{E})$ تبقيان دون تغيير تحت تحويلات لورنس.

9. شحنة خطية طويلة كثافتها λ تقع على الأحداثي الأفقي x في محور الإسناد s. هذه الشحنة الخطية تتحرك باتجاه x بسرعة ثابتة υ. شحنة اختبار q في الموقع (0,0,0) تتحرك بسرعة غير محددة. جد القوة المسلطة على شحنة

الاختبار q ثم استخدم النتيجة لتوضح أن المجالين الكهربائي والمغناطيسي عند النقطة (0,0,0) يرتبطان مع بعضهما بالعلاقة $\vec{B} = \vec{\upsilon} \times E/c^2$.

10. ملف حلزوني عدد لفاته لوحدة الطول يساوى N ويحمل تيـــاراً كهربائيـــاً مقداره I، فإذا كانت كثافة الفيض المغناطيســـي داخـــل الملـــف تســـاوى $B = \mu_0 NI$ و خارجه صفراً. احسب قيمة كل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ داخـــل وخـــارج الملف كما هي مُقاسة من قبل مشاهد في حالة سكون عندما يكون الملـــف متحركاً بسرعة منتظمة υ باتجاه عمودي على طوله.

11. شحنتان $\pm q$ تقعان على خطين متوازيين المسافة بينهما r وهما فـــي حالـــة حركة بسرعتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه كما موضح فـــي الشكل (6 – 17). ما هي القوة التي تسلطها الشحنة (-q) على (+q).



الشكل (6 – 17)

الملاحق

بعض الثوابت الفيزيائية

الاسم	الرمز	القيمة
سرعة الضؤ في الفراغ	c	$3x10^8$ m/s
ثابت بلانك	h	$6.626x10^{-34}$ J.s
	$\hbar$	$1.055x10^{-34}$ J.s
الالكترون فولت	eV	$1.602x10^{-19}$ J
شحنة الالكترون	e	$1.602x10^{-19}$ C
الكتلة الساكنة للالكترون	m_e	$9.109x10^{-31}$ kg
الكتلة الساكنة للبروتون	m_p	$1.673x10^{-27}$ kg
الكتلة الساكنة للنيوترون	m_n	$1.675x10^{-27}$ kg
الكتلة الساكنة للبايون	$m_{\pi\pm}$	273.2 m_e
الكتلة الساكنة للميون	$M_{\mu\pm}$	206.8 m_e
طاقة السكون للالكترون	m_ec^2	0.511 MeV
طاقة السكون للبروتون	m_pc^2	938.6 MeV
طاقة السكون للنيوترون	m_nc^2	939.6 MeV
طاقة السكون للبايون	$M_\pi c^2$	139.6 MeV
طاقة السكون للميون	$M_\mu c^2$	105.7 MeV
سماحية الفراغ	$\in_0$	$8.854x10^{-12}$ $C^2/N.m^2$
نفاذية الفراغ	μ_0	$4\pi x10^{-7}$ wb/A.m
الثابت k في قانون كولوم	$1/4\pi\in_0$	$8.987x10^9$ $N.m^2/C^2$
وحدة الكتل الذرية	U	$1.661x10^{-27}$ kg
التعجيل الأرضي	g	9.8 m/s^2
ثابت الجاذبية	G	$6.672x10^{-11}$ Nm^2/kg^2
كتلة الشمس		$1.99x10^{30}$ kg
كتلة الارض		$5.97x10^{24}$ kg
كتلة القمر		$7.35x10^{22}$ kg
نصف قطر الارض		$6.38x10^6$ m
ثابت بولتزمان	k	$1.381x10^{-23}$ J/K

معجم لبعض المصطلحات العلمية

عربي – إنجليزي

(أ)

انطلاق	Speed
إشعاع	Radiation
امتصاص	Absorption
انبعاث	Emission
انتشار الموجة	Wave Propagation
انحراف	Deviation
إزاحة	Displacement
أثير	Ether
اتجاه	Direction
انعكاس	Reflection
إشارة ضوئية	Light Signal
انكسار	Refraction
أشعة كونية	Cosmic Rays
إحداثيات	Coordinates
انحلال بيتا	Beta – Decay
إنتاج الزوج	Pair Production
إلكترون	Electron
إفناء	Annihilation
أفق	Horizon

(ب)

بايون	Pion
باريون	Baryon
بوزيترون	Positron
بروتون	Proton
برم	Spin

Isospin	برم نظيري
Intrinsic Spin	برم ذاتي

ت

Experiment	تجربة
Acceleration	تعجيل
Compton Effect	تأثير كومبتن
Apparent Frequency	تردد ظاهري
Galilean Transformation	تحويلات غاليليو
Velocity Transformation	تحويل السرعة
Time Transformation	تحويل الزمن
Time dilation	تباطؤ الزمن
Length Contraction	تقلص الطول
Momentum Transformation	تحويل الزخم
Energy Transformation	تحويل الطاقة
Mass Transformation	تحويل الكتلة
Acceleration Transformation	تحويل التعجيل
Elastic Collision	تصادم مرن
Inelastic Collision	تصادم غير مرن
Dispersion	تشتت
Lorentz Transformation	تحويلات لورنس
Geometrical Representation	تمثيل هندسي
Orthogonal Transformation	تحويل تعامدي
Doppler Effect	تأثير دوبلر
Symmetry	تماثل
Nuclear Interaction	تفاعل نووي
Gravitation Interaction	تفاعل تثاقلي
Magnetic Effect	تأثير مغناطيسي
Current	تيار

Surface Integral	تكامل سطحي
Force Transformation	تحويل القوة
Twin	توأم
Attraction	تجاذب
Repulsion	تنافر
Surface Current	تيار سطحي

(ث)

Constant	ثابت
Time Constant	ثابت الزمن

(ج)

Potential	جهد
Astronomical Body	جسم فلكي
Elementary Particle	جسيم أولي
Molecule	جزيء
Strangeness Particles	جسيمات الغرابة
Particle	جسيم
Anti Particle	جسيم الضد
Central Attraction	جذب مركزي
Gravitation	جاذبية

(ح)

Incident	حدث
Relative Motion	حركة نسبية
Bubble Chamber	حجرة الفقاعة
Electromagnetic Induction	حث كهرومغناطيسي
Diffraction	حيود

(د)

Function	دالة

Thermodynamic	ديناميكا حرارية
Impulse	دفع
Work Function	دالة شغل
Invariance	دون تغيير

(ذ)

Atom	ذرة

(ر)

Nuclear Films	رقوق نووية
Schematic Diagram	رسم تخطيطي

(ز)

Angle	زاوية
Rotation Angle	زاوية الدوران
Complex Angle	زاوية عقدية
Real Angle	زاوية حقيقية
Momentum	زخم

(س)

Velocity	سرعة
Relative Velocity	سرعة نسبية
Group Velocity	سرعة المجموعة
Phase Velocity	سرعة الطور
Plane Surface	سطح مستوي
Light Year	سنة ضوئية
Closed Surface	سطح مغلق
Conducting Wire	سلك موصل
Drift Velocity	سرعة الانجراف
Permittivity of Medium	سماحية الوسط
Permittivity of Space	سماحية الفراغ

(ش)

Charge	شحنة
Source Charge	شحنة المصدر
Test Charge	شحنة الاختبار
Work	شغل
Light Ray	شعاع ضوئي
Moving Charge	شحنة متحركة
Field Intensity	شدة المجال
Stationary Charge	شحنة ساكنة
Linear Charge	شحنة خطية
Point Charge	شحنة نقطية
Figure	شكل

(ط)

Energy	طاقة
Kinetic Energy	طاقة حركية
Total Energy	طاقة كلية
Stationary Energy	طاقة السكون
Phase	طور
Spectrum	طيف
Exchange Energy	طاقة متبادلة
Threshold Energy	طاقة العتبة
Potential Energy	طاقة كامنة
Wave Length	الطول الموجي
Gained Energy	طاقة مكتسبة
Emitted Energy	طاقة منبعثة

(ظ)

Phenomenon	ظاهرة

Photoelectric Phenomenon	ظاهرة كهروضوئية

(ع)

Moment	عزم
Element	عنصر
Matrix Element	عنصر المصفوفة
Current Element	عنصر التيار
Differential Element	عنصر تفاضلي
Atomic Number	عدد ذري
Infinitesimal Element	عنصر متناهي الصغر
Perpendicular	العمودي
Lepton Number	العدد اللبتوني
Baryon Number	العدد الباريوني
Strangeness Quantum Number	العدد الكمي للغرابة

(ف)

Vacuum	فراغ
Flux	فيض
Potential Difference	فرق جهد
Photon	فوتون
Phase Difference	فرق طور
Space	فضاء
Four Dimensional Space	فضاء رباعي الأبعاد
Proper Time Interval	فترة زمنية مناسبة
Interval	فترة
Magnetic Flux	فيض مغناطيسي

(ق)

Force	قوة
Central Force	قوة مركزية
Classical Value	القيمة التقليدية
Exchange Force	قوة التبادل
Gauss's Law	قانون كاوس
Mass Conservation Law	قانون حفظ الكتلة
Energy Conservation Law	قانون حفظ الطاقة
Coulomb's Law	قانون كولوم
Lorentz Force	قوة لورنس
Right-Hand Rule	قاعدة اليد اليمنى
Rod	قضيب

(ك)

Mass	كتلة
Atomic Mass	كتلة ذرية
Density	كثافة
Current Density	كثافة تيار
Linear Charge Density	كثافة الشحنة الخطية
Surface Charge Density	كثافة الشحنة السطحية
Flux Density	كثافة الفيض
Vector Quantity	كمية متجهة
Rest Mass	كتلة السكون
Kaon	الكايون

(ل)

Lepton	اللبتون
Lambda Hybron	لامدا هايبرون

(م)

Substance	مادة
Infinity	مالانهاية
Vector	متجه
Displacement Vector	متجه الازاحة
Capacitor	متسعة
Field	مجال
Vector Diagram	مخطط اتجاهي
Coefficient	معامل
Resistance	مقاومة
Curve	منحنى
Conductor	موصل
Conserved	محفوظ
Source	مصدر
Electrons Source	مصدر الكترونات
Uncertainty Principle	مبدأ اللايقين
Electromagnetic Wave	موجة كهرومغناطيسية
Spectrometer	المطياف
Equivalent	متكافئ
Parallel	موازي
Meson	ميزون
Optical Path	مسار ضوئي
Period	مدة الذبذبة
Mirror	مرآة
Reference Frames	محاور إسناد
Equation	معادلة
Transformation Equations	معادلات تحويل

Proper	مناسب
Observer	مشاهد
Orbit	مدار
Spaceship	مركبة فضائية
Laboratory System	محاور مختبرية
Center of Mass System	محاور مركز الكتلة
Muon	الميون
Accelerator	معجل
Four Vector	متجه رباعي
Position Vector	متجه الموضع
Point Source	مصدر نقطي
Transformation Matrix	مصفوفة التحويل
Rotation Matrix	مصفوفة الدوران
Four Velocity	متجه الرباعي للسرعة
Four Momentum	متجه الرباعي للزخم
Four Acceleration	متجه الرباعي للتعجيل
Four Force	متجه الرباعي للقوة
Debrogly Wave	موجة ديبرولي
Spherical Wave	موجة كروية
Plane Wave	موجة مستوية
Observer Position	موقع المشاهد
Retarded Position	الموقع المتأخر

(ن)

Relativity	نسبية
S.I. Units	النظام الدولي للوحدات
Nucleus	نواة
Neutron	نيوترون
Neutrino	نيوترينو

Origin	نقطة الاصل
Nucleon	النيوكلون
Wave Theory	النظرية الموجية
Telescope	منظار
Coordinates System	نظام احداثيات
Isolated System	نظام معزول
Diffraction Pattern	نموذج حيود
Charge Carriers	ناقلات شحنة

(هـ)

Hyperon	الهايبرون
Hydron	الهايدرون

(و)

Unit	وحدة
Unit Vector	وحدة متجه
Atomic Mass Unit	وحدة الكتلة الذرية
Medium	وسط
Conducting Medium	وسط ناقل
Moving Medium	وسط متحرك
Stationary Medium	وسط ساكن

المراجع

1. Kacser C. Introduction to the special theory of relativity, prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J 1967.

2. Griffths D.J. Introduction to Electrodynamics, Prentice-Hall Inc Englewood Cliffs 07632, 1981.

3. Reitz J.R. and Milford F.J., Introduction to Electromagnetic Theory Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

4. Landau L.D. and Lifshitz E.M., Mechanics and Electrodynamics Addison- Wesley Publishing Company, 1972.

5. Jackson J.D., Classical Electrodynamics, John Wiley and sons Inc., 1975.

6. Lorrain P. and Carson D. R., Electromagnetic Fields and Waves W.H. Freeman and Company, 1970.

7. Richard T.Weidner and Robert L.Sells, Elementary Modern Physics, Allyn & Bacon , Inc. Boston , London,1973.

8. Jerry B Marion,, Physics in the Modern World, Jerry Academic Press New York ,1976.

9. Jayorear, Fundamental Physics, 2nd edition, John Wily & Sons, Inc., New York, 1967.

10. Elmer E Anderson, Introduction to Modern Physics, Dryden Press, New York, 1982.

11. Hugh D Young, University Physics, Addison Wesley publishing Company, New York, 1990.

12. Raymond A .Serway, College Physics, Palm Press Inc., 1992.

13.د. ناظم حسون العطار، د. راشد الراشد، أسس الكهربائية والمغناطيسية، مطبعة دار الحكمة- البصرة، 1990 .

14.ادواردم. بيرسل، ترجمة الأستاذ الدكتور محمد أمين سليمان والدكتورة ليلى سعدو باتومال، الكهربائية والمغناطيسية- مقرر بيركلي في الفيزياء – المجلد الثاني، الدار الدولية للنشر والتوزيع، 1992.

يُعتبر موضوع هذا الكتـــاب نقطـــة البداية المنطقية لدراسة الفيزياء الحديثة التي يجب أن تبدأ بمعرفـــة – أســـس ومفـــاهيم النظرية النسبية الخاصة التي تأسست علـــى يد العالم اينشتاين عام 1905 والتي تضمنت دراسة العلاقة الوطيدة بين الزمان والمكان، وبين الكتلة والطاقة وكذلك دراسة الحركـــة النسبية للجسيمات المتحركة بسرعات عالية تقترب من سرعة الضوء، حيث كانت أهـــم نتائج النظرية النسبية الخاصة هـــو قـــانون تغير الكتلة بتغير السرعة، وكـــذلك قـــانون تحول المادة إلى طاقة وتحول الطاقـــة إلـــى مادة، وبدون هذه العلاقات لا يمكننـــا فهـــم الذرة التي هـــي مركـــز اهتمـــام الفيزيـــاء الحديثة. وبذلك نجحـــت النظريـــة النســـبية الخاصة في تفسير عدد كبير من الظـــواهر التي يتفاعل فيها الإشعاع مع المـــادة، مثـــل الظاهرة الكهروضوئية واثر كومبتون وكذلك في حالات الامتصاص والانبعاث الإشعاعي في ظاهرة موسباور وعدد أخر من الظواهر التي هي ضمن مفردات هذا الكتاب.